

a) Aus der Spannung U_0 und dem Gesamtwiderstand der Schaltung R_{tot} berechnet sich der Strom I :

$$I = \frac{U_0}{R_{tot}} = \frac{U_0}{R + R \parallel R_n} = \frac{U_0}{R + \frac{R R_n}{R + R_n}} = \frac{U_0}{R} \frac{R + R_n}{R + 2R_n}$$

Daraus berechnen wir mit der Stromteilerregel den Strom I_n :

$$I_n = I \frac{R}{R + R_n} = \frac{U_0}{R} \frac{R + R_n}{R + 2R_n} \frac{R}{R + R_n} = \frac{U_0}{R + 2R_n}$$

Aus diesem Strom und dem Widerstand R_n lässt sich die Nutzleistung P_n berechnen:

$$P_n = I_n^2 R_n = \frac{U_0^2 R_n}{(R + 2R_n)^2}$$

b) Um das Maximum der Nutzleistung zu finden, setzen wir die Ableitung von P_n nach R_n gleich Null.

Die Ableitung berechnen wir mit der Quotientenregel:

$$\frac{\partial P_n}{\partial R_n} = U_0^2 \frac{1 \cdot (R + 2R_n)^2 - R_n 2(R + 2R_n) \cdot 2}{(R + 2R_n)^4} = U_0^2 \frac{(R + 2R_n) - 4R_n}{(R + 2R_n)^3} = 0 \Rightarrow (R + 2R_n) - 4R_n = 0$$

$$2R_n = R \Leftrightarrow R_n = \frac{R}{2}$$

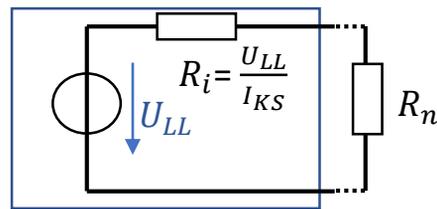
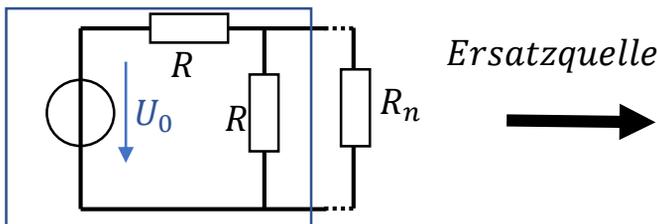
Die maximale Nutzleistung ergibt sich durch Einsetzen des erhaltenen Widerstandes R_{n1} :

$$P_{n\max} = \frac{U_0^2 R_{n1}}{(R + 2R_{n1})^2} = \frac{U_0^2 \frac{R}{2}}{\left(R + 2 \frac{R}{2}\right)^2} = \frac{U_0^2 \frac{R}{2}}{(2R)^2} = \frac{U_0^2}{8R}$$

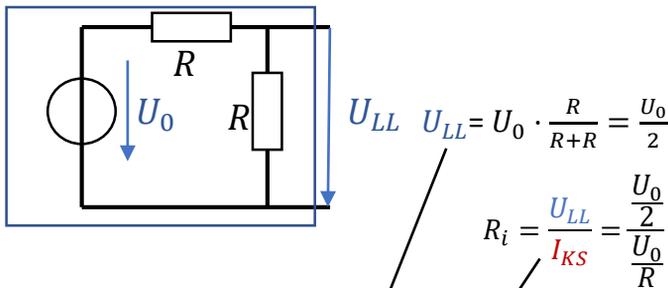
Alternative Lösung für b) (Gezeigt in Übung)

Idee: R_n «entfernen» und Schaltung als Black Box betrachten.

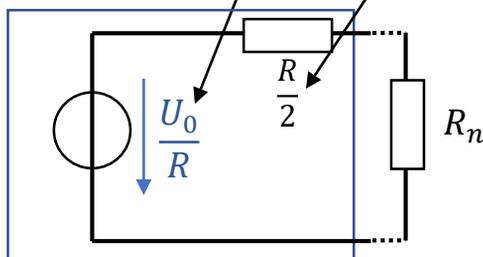
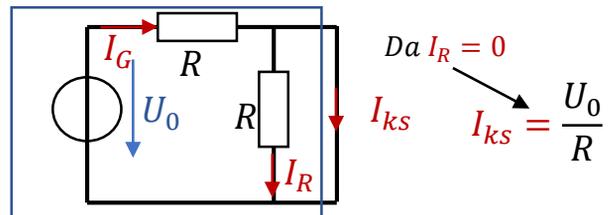
Danach Black Box als Quelle mit Innenwiderstand modellieren.



1) Leerlaufspannung berechnen:



2) Kurzschlussstrom:



Maximale Leistung:

$$R_n = R_i \rightarrow R_n = \underline{\underline{\frac{R}{2}}}$$