Aufgabe 4: Ersatzzweipolquellen

Für alle Aufgaben gilt, dass U_L die Spannung zwischen den Klemmen A und B ist und I_k der Strom der durch die Verbindung von A und B fliesst, wen man diese Klemmen ideal miteinander verbindet. R_i erhält man, wenn man alle Quellen im Netzwerk gleich 0 setzt und den Gesamtwiderstand berechnet. Ausserdem gilt die Beziehung:

$$U_L = R_i \cdot I_k$$

a) Wir berechnen zuerst die Spannung U_L mit Hilfe des Überlagerungsprinzips. Diese erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welcher Strom durch den Widerstand mit Grösse R fliesst. Wenn wir die beiden Stromquellen entfernen, kann kein Strom durch diesen Widerstand fliessen. Wenn wir die Spannungsquelle kurz schliessen und die Stromquellen wieder einsetzen, kann man den fliessenden Strom aus **Fig. 3** entnehmen:

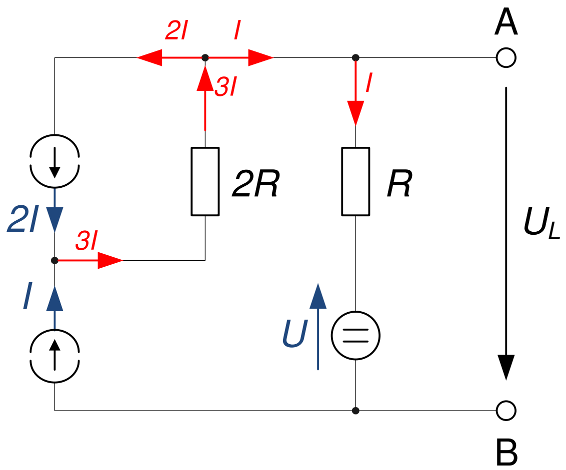

Fig. 3: Netzwerk mit eingezeichneten Strömen

Wir erhalten also mittels einer Maschengleichung für U_L:

$$U_L = R \cdot I - U$$

Nun wollen wir den Strom I_k mit Hilfe des Überlagerungsprinzips berechnen. Aus **Fig. 3** wissen wir, dass dieser I beträgt, wenn die Spannungsquelle kurzgeschlossen ist und die Stromquellen angeschlossen sind. Der Strom der fliesst, wenn wie Spannungsquelle angeschlossen ist und die Stromquellen entfernt sind, ist I_q = - U/R. Wir erhalten also für I_k:

$$I_k = I - \frac{U}{R}$$

Nun setzen wir alle Quellen im Netzwerk gleich 0 und berechnen den Gesamtwiderstand. Damit ergibt sich R_i zu:

$$R_i = R$$

b) Wir gehen gleich vor wie bei a) und berechnen zuerst U_L mit Hilfe des Überlagerungsprinzips. Wir betrachten zuerst den Fall $U \neq 0$ und $I = 0$. Die Spannung U_{La} beträgt dann $U/2$, da über jedem Wiederstand ein viertel der Spannung abfällt. Für den Fall $I \neq 0$ und $U = 0$ haben die Klemmen A und B aus Symmetriegründen gleiches Potential. U_{Lb} ist also 0 und es ergibt sich:

$$U_L = U_{La} + U_{Lb} = \frac{U}{2}$$

Nun berechnen wir I_k mit Hilfe des Überlagerungsprinzips. Wenn $U \neq 0$ und $I = 0$ ist $I_{ka} = U/2R$. Dies lässt sich leicht mit einer Maschengleichung verifizieren. Für $I \neq 0$ und $U = 0$ fliesst kein Strom durch die Klemmen A und B und I_{ka} ist somit 0. Es gilt also:

$$I_k = I_{ka} + I_{kb} = \frac{U}{2R}$$

Für den Widerstand R_i setzen wir wiederum die Quellen gleich 0 und erhalten:

$$R_i = (R+R) \| (R+R) = \frac{2R \cdot 2R}{2R+2R} = R$$

c) In diesem Beispiel müssen wir das Überlagerungsprinzip nicht anwenden, da das Netzwerk nur aus einer Quelle besteht. Die Parallelschaltung der Widerstände *2R* mit *2R* auf der linken Seite vereinfachen wir sogleich zu *R* (siehe **Fig. 4).**

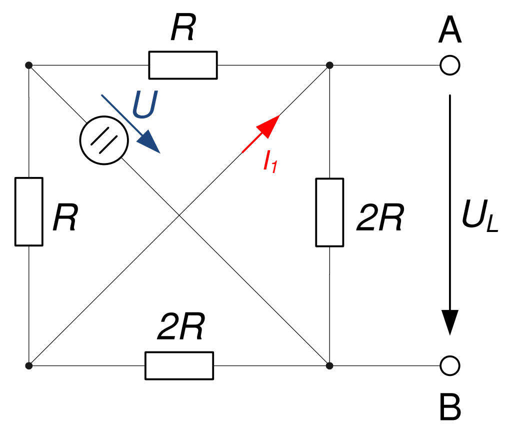

Fig.4: Netzwerk mit eingezeichneten Strömen

Für die Bestimmung der Leerlaufspannung können wir aus Symmetriegründen I_1=0 annehmen. U_L ergibt sich dann zu:

$$U_L = U \frac{2R}{R+2R} = \frac{2}{3} U$$

Wenn wir nun zwischen den Klemmen A und B eine Verbindung anbringen, fliesst der Kurzschlussstrom I_k. Dabei ist I_1 nicht mehr Null.

$$I_k = \frac{U}{R} + \frac{U}{R} = \frac{2 \cdot U}{R}$$

Für R_i erhalten wir durch Kurzschliessen der Spannungsquelle:

$$R_i = (R) \| (2R) \| (R \| 2R) = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R \cdot 2/3} \right)^{-1} = \frac{R}{3}$$