Aufgabe 1

a)

Bei Resonanz verschwindet der Blindstrom, d.h. der Blindleitwert der Schaltung verschwindet ($B = 0$). Der Leitwert der Schaltung setzt sich aus der Serienschaltung von L und R_L und der Parallelschaltung von C zusammen

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L + R_\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R_\mathrm{L} - \mathrm{j}\omega L}{R_\mathrm{L}^2 + \omega^2 L^2}.$$

Hiermit ergibt sich der Blindleitwert

$$B = \omega C - \frac{\omega L}{R_\mathrm{L}^2 + \omega^2 L^2},$$

welcher laut Voraussetzung verschwinden muss. Damit kann man schliesslich die Resonanzfrequenz berechnen

$$\omega_\mathrm{p} C - \frac{\omega_\mathrm{p} L}{R_\mathrm{L}^2 + \omega_\mathrm{p}^2 L^2} = 0$$

$$\Rightarrow f_\mathrm{p} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\mathrm{L}}{L}\right)^2} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{R_\mathrm{L}^2 C}{L}} \text{ mit } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Der Resonanzstrom lässt sich durch die Kenntnis von $\underline{Y}$ und $B = 0$ berechnen

$$I_\mathrm{p} = U_\mathrm{q} Y = U_\mathrm{q}\left|\mathrm{j}\omega_\mathrm{p} C + \frac{R_\mathrm{L} - \mathrm{j}\omega_\mathrm{p} L}{R_\mathrm{L}^2 + \omega_\mathrm{p}^2 L^2}\right| = \frac{U_\mathrm{q} R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + \omega_\mathrm{p}^2 L^2} = \frac{U_\mathrm{q} R_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2 + L^2\left(\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_\mathrm{L}}{L}\right)^2\right)} = \frac{U_\mathrm{q} R_\mathrm{L} C}{L}.$$

Einsetzen von Zahlenwerten ergibt

$$f_\mathrm{p} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}1\,\mathrm{mH}\cdot 100\,\mu\mathrm{F}} - \left(\frac{0{,}1\,\Omega}{0{,}1\,\mathrm{mH}}\right)^2} = 1584\,\mathrm{Hz}$$

$$I_\mathrm{p} = U_\mathrm{q} \cdot \frac{0{,}1\,\Omega \cdot 100\,\mu\mathrm{F}}{0{,}1\,\mathrm{mH}} = U_\mathrm{q} \cdot 0{,}1\,\mathrm{S}$$

b)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0{,}1\,\mathrm{mH}\cdot 100\,\mu\mathrm{F}}} = 1592\,\mathrm{Hz}$$

Die Resonanzfrequenz f_p ist nur 0,5% kleiner als die Kennfrequenz f_0. Allgemein ist der Unterschied zwischen f_p und f_0 nur für sehr grosse Dämpfungen des Schwingkreises wesentlich.