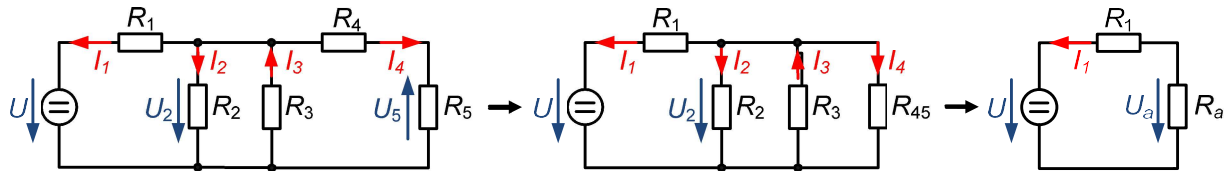


Aufgabe 3: Berechnung von Gleichstromkreisen

a)

**Fig. 6:** Netzwerktransformation

Wie fassen die beiden in Reihe liegenden Widerstände R_4 und R_5 zum Ersatzwiderstand

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 50\Omega + 10\Omega = 60\Omega$$

zusammen und erhalten dadurch die in **Fig.6** dargestellte mittlere Schaltung. Hierin liegen die Widerstände R_2 , R_3 und R_{45} parallel. Wenn wir diese zusammenfassen, erhalten wir die in **Fig.6** dargestellte rechte Schaltung. Deren Ersatzwiderstand R_a berechnet sich zu:

$$\frac{1}{R_a} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} = \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{60\Omega} = 0.0617\text{S} \Rightarrow R_a = \frac{1}{0.0617\text{S}} = 16.2\Omega$$

Dadurch können wir den Strom I_1 wie folgt berechnen:

$$U = -I_1 R_1 - I_1 R_a \Rightarrow I_1 = -\frac{U}{R_1 + R_a} = -\frac{24\text{V}}{30\Omega + 16.2\Omega} = -519\text{mA}$$

Damit erhalten wir für die Teilspannung U_a :

$$U_a = -I_1 R_a = 0.519\text{A} \cdot 16.2\Omega = 8.42\text{V}$$

Die Spannung U_a fällt auch über den Widerständen R_2 , R_3 und R_{45} ab und damit gilt $U_2 = U_3 = U_{45} = U_a$. Die Ströme I_2 , I_3 und I_4 berechnen sich dann zu:

$$I_2 = \frac{U_a}{R_2} = \frac{8.42\text{V}}{50\Omega} = 168\text{mA}$$

$$I_3 = -\frac{U_a}{R_3} = -\frac{8.42\text{V}}{40\Omega} = -211\text{mA}$$

$$I_4 = \frac{U_a}{R_{45}} = \frac{8.42\text{V}}{60\Omega} = 140\text{mA}$$

Die Spannung U_5 können wir nun über die Spannungsteilerregel berechnen:

$$U_5 = -U_a \frac{R_5}{R_4 + R_5} = -8.42\text{V} \frac{10\Omega}{50\Omega + 10\Omega} = -1.403\text{V}$$

- b) Der Originalschaltung kann man entnehmen, dass die Widerstände R_2 und R_4 parallel zueinander liegen und diese Parallelschaltung mit R_3 in Reihe liegt. Der Widerstand R_1 liegt direkt an der Spannung U . Wir können daher die Originalschaltung wie in **Fig. 7** mit einer übersichtlicheren Ersatzschaltung ersetzen.

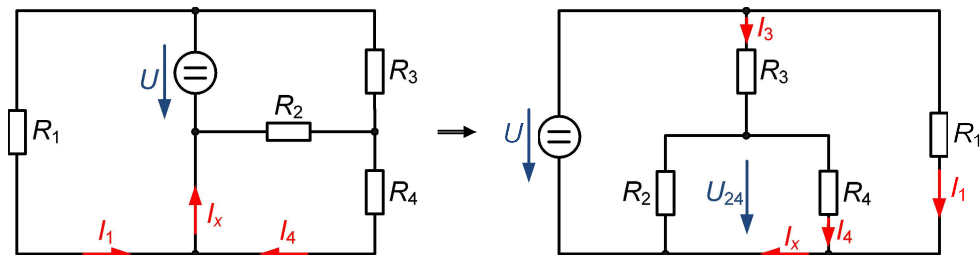


Fig. 7: Netzwerktransformation

Als erstes berechnen wir den Strom I_1 :

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{48\text{V}}{90\Omega} = 0.533\text{A}$$

Nun fassen wir R_2 und R_4 zum Ersatzwiderstand R_{24} zusammen:

$$R_{24} = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{50\Omega \cdot 60\Omega}{50\Omega + 60\Omega} = 27.3\Omega$$

Aus diesem können wir den Strom I_3 berechnen:

$$I_3 = \frac{U}{R_3 + R_{24}} = \frac{48\text{V}}{40\Omega + 27.3\Omega} = 0.714\text{A}$$

Daraus lässt sich nun U_{24} berechnen:

$$U_{24} = I_3 R_{24} = 0.714\text{A} \cdot 27.3\Omega = 19.5\text{V}$$

Und wir erhalten für I_x :

$$I_x = I_1 + I_4 = 0.533\text{A} + 0.324\text{A} = 0.857\text{A} = 857\text{mA}$$

- c) Der Originalschaltung kann man entnehmen, dass die Widerstände R_1 , R_2 und R_3 parallel zueinander liegen. Mit dieser Parallelschaltung liegt der Widerstand R_4 in Reihe. Der Widerstand R_5 liegt direkt parallel zur Spannungsquelle. Wir können daher die Originalschaltung wie in **Fig. 8** mit einer übersichtlicheren Ersatzschaltung ersetzen.

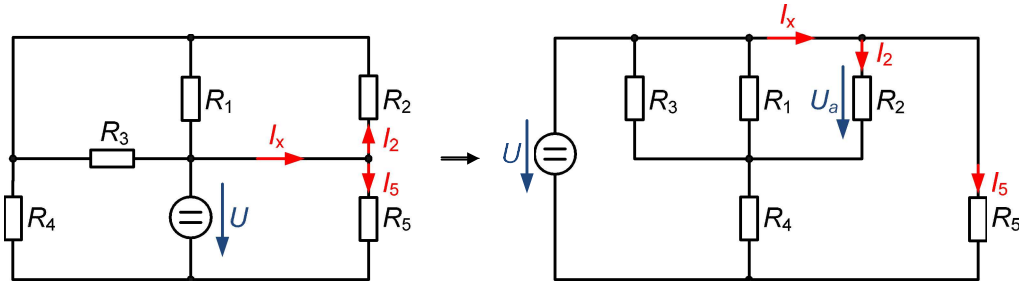


Fig. 8: Netzwerktransformation

Als erstes fassen wir die Widerstände R_1 , R_2 und R_3 zum Ersatzwiderstand R_a zusammen:

$$R_a = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{50} + \frac{1}{45} + \frac{1}{40}} \Omega = 14.9 \Omega$$

Durch Anwendung der Spannungsteilerregel erhalten wir für die in **Fig. 8** gekennzeichnete Spannung U_a den Wert:

$$U_a = U \frac{R_a}{R_4 + R_a} = 48V \frac{14.9 \Omega}{50 \Omega + 14.9 \Omega} = 11.01V$$

Damit ergibt sich der gesuchte Strom I_x zu:

$$I_x = I_2 + I_5 = \frac{U_a}{R_2} + \frac{U}{R_5} = \frac{11.01V}{45 \Omega} + \frac{48V}{60 \Omega} = 1.04A$$

- d) Um die Maschen- und Kontengleichungen aufzustellen, führen wir die in **Fig. 9** dargestellten Strom- und Spannungsbezeichnungen ein.

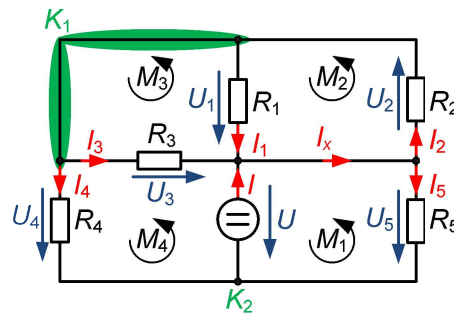


Fig. 9: Originalnetzwerk mit Strom- und Spannungsbezeichnungen

Insgesamt haben wir sechs Zweige, d.h. wir benötigen sechs linear unabhängige Gleichungen. Wir haben 3 Knoten, also brauchen wir $3-1=2$ unabhängige Knotengleichungen und $6-2=4$ unabhängige Maschengleichungen.

Die Wahl der Maschengleichungen kann auf verschiedene Arten erfolgen, solange die Gleichungen unabhängig sind ($\Rightarrow$ vollständiger Baum, Auftrennen der Maschen). Für die eingezeichneten Maschen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 M_1: \quad U - U_5 &= 0 & \Rightarrow U_5 &= U \\
 M_2: \quad U_1 + U_2 &= 0 & \Rightarrow U_1 &= -U_2 \\
 M_3: \quad U_3 - U_1 &= 0 & \Rightarrow U_3 &= U_1 = -U_2 \\
 M_4: \quad -U - U_3 + U_4 &= 0 & \Rightarrow U_4 &= U + U_3 = U - U_2
 \end{aligned}$$

Für die Knotengleichungen wählen wir die zwei eingezeichneten Knoten. Da die Ströme und Spannungen über $U=RI$ zusammenhängen, ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 K_1: \quad I_2 - I_1 - I_3 - I_4 &= 0 & \Leftrightarrow \frac{U_2}{R_2} - \frac{U_1}{R_1} - \frac{U_3}{R_3} - \frac{U_4}{R_4} &= \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_2}{R_1} + \frac{U_2}{R_3} - \frac{U - U_2}{R_4} = 0 \\
 K_2: \quad -I + I_4 + I_5 &= 0 & \Leftrightarrow I &= \frac{U_4}{R_4} + \frac{U_5}{R_5} = \frac{U - U_2}{R_4} + \frac{U}{R_5}
 \end{aligned}$$

Durch Umformen der Gleichung aus K_1 erhält man schliesslich:

$$U_2 = \frac{U}{R_4} \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{48V}{50\Omega} \frac{1}{\frac{1}{45\Omega} + \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{50\Omega}} = 11.01V$$

Somit lassen sich alle Spannungen und Ströme im Netzwerk berechnen, auch der gesuchte Strom I_x

$$I_x = I_2 + I_5 = \frac{U_2}{R_2} + \frac{U}{R_5} = \frac{11.01V}{45\Omega} + \frac{48V}{60\Omega} = 1.04A$$