Skript zum PVK zur Vorlesung

Elektrotechnik 1

für D-MAVT

verfasst von

René Zurbrügg

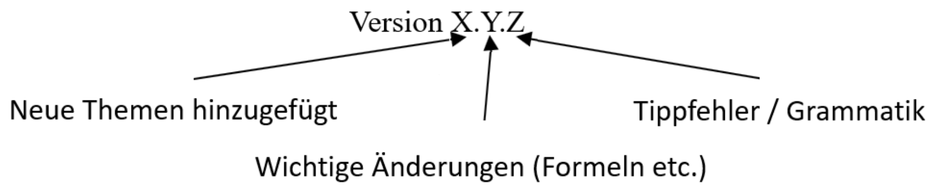
D-ITET
ETH Zürich

Zürich, Juni 2018

Vorwort

Dieses Skript entstand als Beiblatt zum Prüfungsvorbereitungskurs "Elektrotechnik 1" im Juni 2018. Es ist primär als Hilfe für die Studenten gedacht, mit dem Ziel, den Fokus auf die prüfungsrelevanten Themen zu legen. Verbreitung über die Grenzen der ETH hinaus ist untersagt. Es wird weder Anspruch auf Vollständigkeit noch auf Korrektheit erhoben. Fragen, Anregungen und vor allem Korrekturen sind willkommen und sollten an zrene@student.ethz.ch adressiert werden.

Version 1.0.0

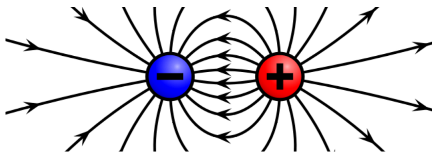


Inhaltsverzeichnis

1 Analyse von Gleichstromnetzwerke

1.1 Strom, Spannung und Widerstand

Zwischen zwei unterschiedlich geladenen Punkten entsteht ein **elektrisches Feld**. Geladene Teilchen spüren eine Kraft in Richtung dieser Feldlinien.



Definition **Spannung**

Wir definieren die Spannung zwischen zwei Punkten als das Wegintegral über das elektrische Feld:

$$U_{AB} := \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \text{ [U] = Volt [V]}$$

Bemerkung

Da die Beziehung $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ gilt und die Arbeit als $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$ definiert ist, können wir die Spannung zwischen zwei Punkten als **Maß der benötigten Arbeit** um ein Ladungsträger von A nach B zu bringen betrachten.

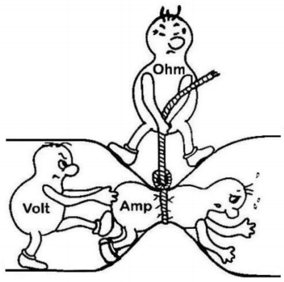
Definition **Strom**

Als Strom bezeichnen wir die Menge von Ladungen welche in einer gewissen Zeit durch eine Fläche fließen.

$$I := \frac{\sharp Ladung}{Zeit} = \frac{dQ}{dt} \text{ [I] = } \mathbf{A}\text{, Ampère}$$

Definition **Widerstand und Leitwert**

Der **Widerstand** bestimmt, wieviel Strom fließen kann, wenn eine bestimmte Spannung angelegt wird.
Ist der Wert des Widerstandes unabhängig vom Strom, so bezeichnen wir ihn als ohmschen Widerstand.



$$R := \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{A}, [R] = \Omega, Ohm$$

Als **Leitwert** bezeichnen wir die Inverse des Widerstandes. Er gibt an, wie groß die Spannung ist, wenn ein gewisser Strom fließt.

$$Y = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l}$$

Da das elektrische Feld wirbelfrei ist, erhalten wir unabhängig vom Weg den gleichen Wert für die Spannung U_{AB}
Dies bedeutet jedoch auch, dass wir für einen geschlossenen Weg die Spannung $0V$ erhalten müssen, da für jede geschlossene Kurve γ gilt:

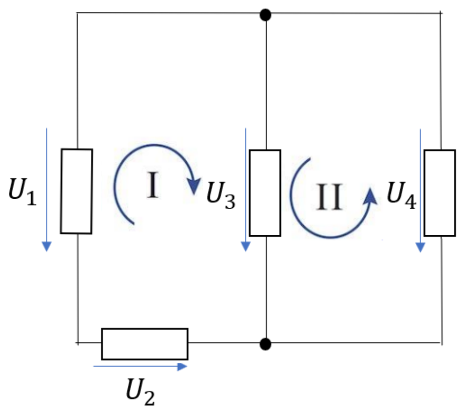
$$\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{01} + U_{10} = 0$$

Mit dieser Erkenntnis können wir die Maschenregel definieren:

Definition **Maschenregel**

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ergibt 0

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$



Maschenregel

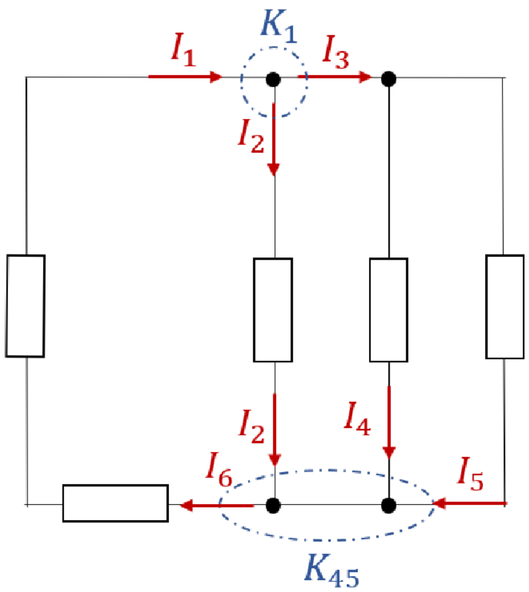
I: $(-U_1) + U_3 + (-U_2) = 0$
II: $U_3 + (-U_4) = 0$

Analog können wir mithilfe der Ladungserhaltung argumentieren, dass sämtliche Ladungen, welche in ein Gebiet hineinfließen, auch wieder aus diesem hinausließen müssen.

Definition **Knotenregel**

> Die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein/hinausfließen muss 0 ergeben.
>
> $$\sum_{i=0}^{n} I_n = 0$$

Wichtig Die Knotenregel kann auch auf ein Gebiet von Knoten angewandt werden.



Knotengleichungen

K_1: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
K_{45}: $I_2 + I_4 + I_5 - I_6 = 0$

1.2 Grundlegende Netzwerkumformungen

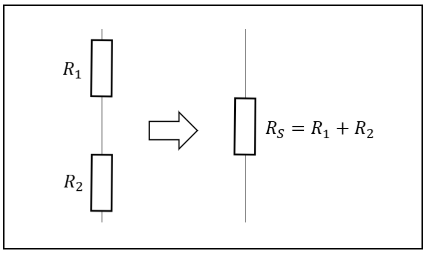
Wir interessieren uns nun dafür, wie sich Widerstände verhalten, wenn wir sie seriell/parallel verknüpfen.

Definition **Serienschaltung**

Werden mehrere Widerstände seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Widerstandswerte

$$R_{serie} = \sum_{i=0}^{n} R_i$$

Begründung
Mehrere Widerstände in Serie können als ein langer Widerstand mit konstanter Fläche angesehen werden. Da die Längenabhängigkeit des Widerstandes im Zähler steht, addieren sich die Werte.
$R_s = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A} = \rho \cdot \frac{l_1}{A} + \rho \cdot \frac{l_2}{A} = R_1 + R_2$

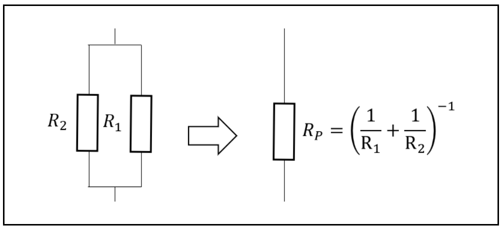


Definition **Parallelschaltung**

Werden mehrere Widerstände parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Leitwerte

$$Y_{parallel} = \sum_{i=0}^{n} Y_i \quad \Bigg| \quad R_{parallel} = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

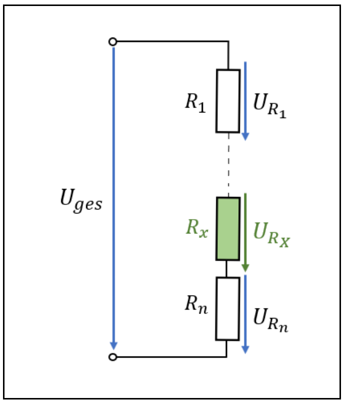
Begründung
Mehrere Widerstände parallel können als ein Widerstand mit größerer Fläche und konstanter Länge angesehen werden. Da die Flächenabhängigkeit des Widerstandes im Nenner steht, addieren sich die Leitwerte.
$Y_p = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1 + A_2}{l} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1}{l} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_2}{l} = Y_1 + Y_2$



Definition **Spannungsteiler**

Die Spannungsteilerregel gibt an, wie sich eine Spannung über verschiedene Widerstände aufteilt, wenn diese in **Serie** geschaltet sind.

$$U_{R_x} = U_{ges} \cdot \frac{R_X}{\sum R_i}$$



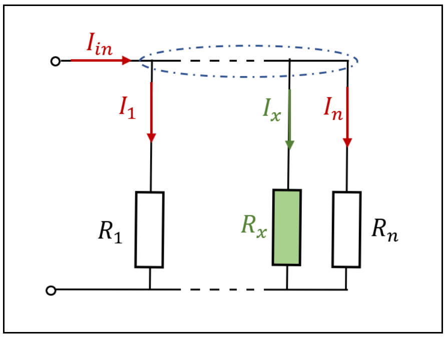
Begründung

Gemäss $U = R \cdot I$ und der Serienschaltung ist der Strom durch alle Widerstände gegeben als $I = \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$ Nun müssen wir nur noch den Strom mit dem gesuchten Widerstand multiplizieren um die Spannung zu erhalten: $U_{R_X} = R_X \cdot I = R_X \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$

Definition **Stromteiler**

Die Stromteilerregel gibt uns an, wie sich die Ströme in einem Knoten aufteilen, wenn die Widerstände **parallel** geschaltet sind.

$$I_x = I_{in} \cdot \frac{(R_1||...||R_n)}{R_x}$$



Spezialfall 2 Widerstände

Falls der Stromteiler nur mit zwei Widerständen angewendet wird, vereinfacht sich die Formel:

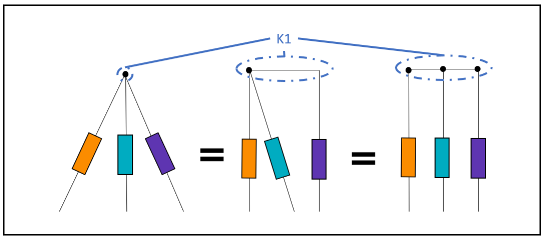
$$I_x = I_{in} \cdot \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

Der Widerstand, dessen Strom uns **nicht** interessiert, steht hierbei im Zähler!

1.2.1 Grundregeln bei Netzwerkumformungen

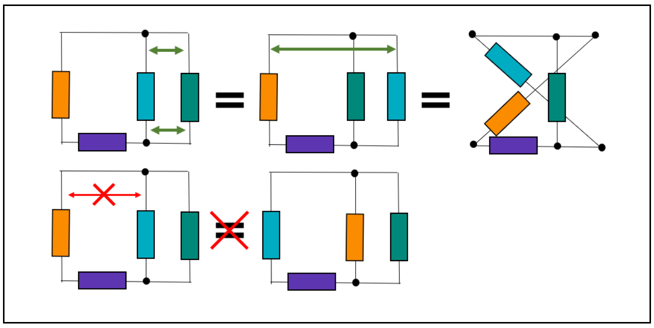
Regel 1 **Expandieren von Knoten**

Knoten können aufgeteilt und mit Verbindungslinien verbunden werden



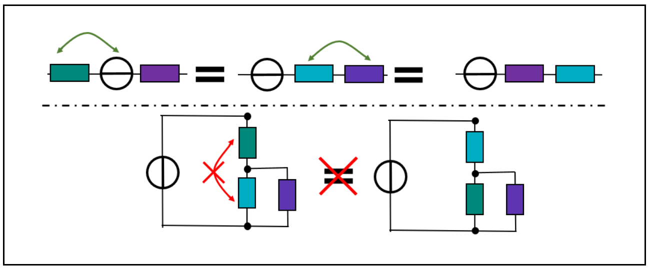
Regel 2 **Verschieben von Elementen**

Elemente können entlang von **Verbindungslinien ohne Widerständen** verschoben werden



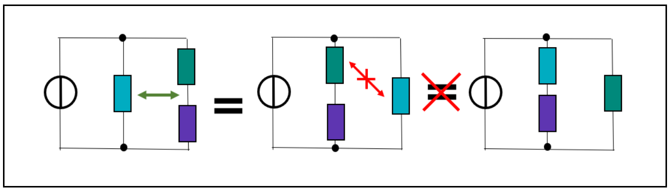
Regel 3 **Vertauschen von Elementen in Serie**

Elemente, die **in Serie** geschaltet sind, können vertauscht werden



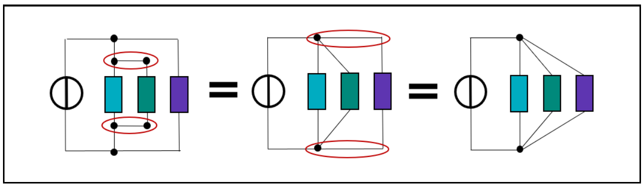
Regel 4 **Vertauschen von parallel geschalteten Elementen**

Elemente die **parallel** geschaltet sind, können vertauscht werden



Regel 5 **Knoten kontrahieren**

(Analog zu 1) Knoten können zusammengezogen werden, sofern sie nicht durch einen Widerstand verbunden sind.

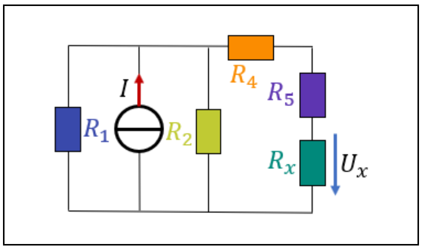


1.3 Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen

1. Bringe Quelle auf die linke Seite
2. Forme mit Regel 1 - 5 das Netzwerk soweit um, bis nur noch Spannungs-/Stromteiler oder einfache Maschen vorhanden sind.
3. Expandiere nun das Netzwerk Schritt für Schritt, bis die Spannung über dem gesuchten Widerstand berechnet werden kann.

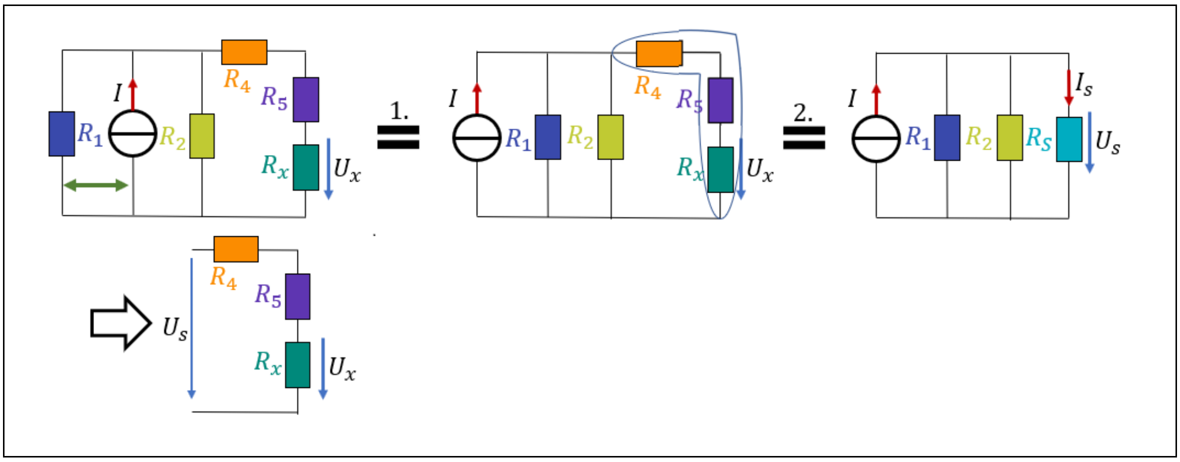
Beispiel #1

1) Berechnen sie U_x in Abhängigkeit des Quellstromes I



Lösung

1. Gemäss Regel 2 können wir R_1 und die Stromquelle vertauschen.
2. Die Widerstände R_4, R_5 und R_x können zu $R_S = R_3 + R_4 + R_5$ zusammengefasst werden.
3. Mithilfe der Stromteilerregel erhalten wir $I_s = I \cdot \frac{(R_1||R_2||R_s)}{R_s}$ und somit $U_s = I \cdot (R_1||R_2||R_S)$
4. Die Spannung U_s liegt also über dem Widerstand R_s an. Wenn wir diesen wieder in die ursprünglichen 3 Widerstände aufteilen, erhalten wir mithilfe der Spannungsteilerregel $U_x = U_s \cdot \frac{R_x}{R_4+R_5+R_x}$

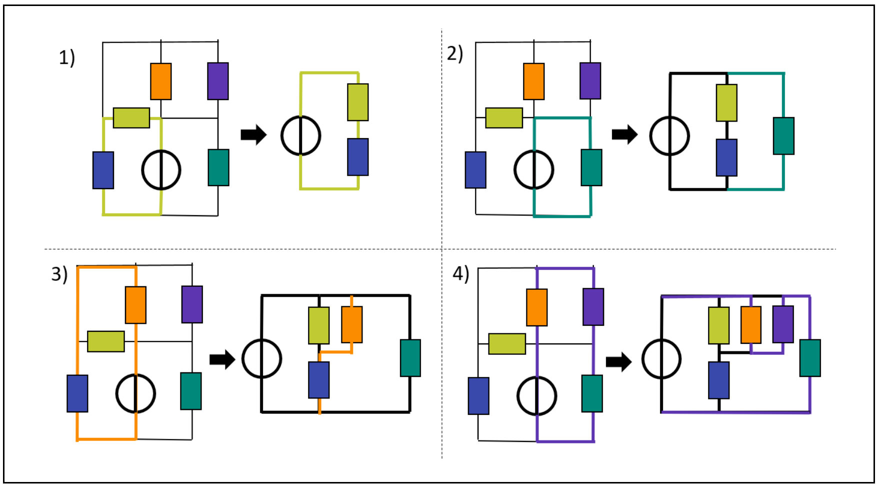


In manchen Fällen kann es schwierig sein, die Quelle auf die linke Seite zu bringen oder das Schaltbild nützlich umzuformen.
Um ein erstes Ersatzschaltbild zu erhalten, kann das "Flussverfahren" angewandt werden.

Definition **Flussverfahren**

Beim Flussverfahren überlegt man sich sämtliche Arten, wie der Strom von einem Ende der Quelle zum anderen fliessen kann, und zeichnet somit ein Ersatzschaltbild.

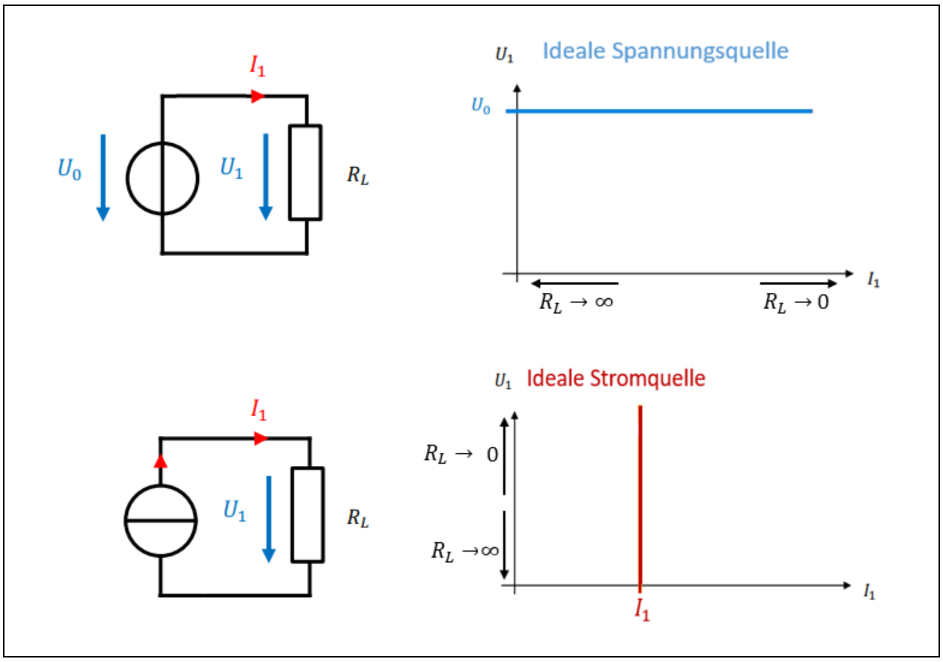
Beispiel



1.4 Quellen

Definition **Ideale Quelle**

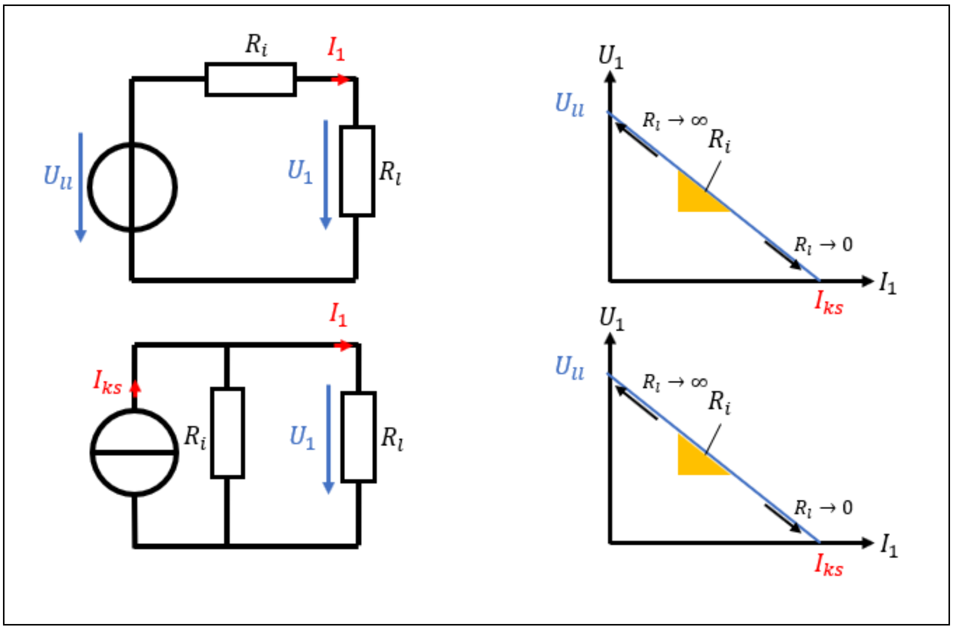
Eine ideale Strom-/Spannungsquelle liefert immer denselben Strom/dieselbe Spannung, unabhängig von der Last, welche angehängt wird.



Mit idealen Strom-/Spannungsquellen können wir theoretisch unendlich viel Spannung/Strom über einem Lastwiderstand erzeugen.
(Beispiel ideale Spannungsquelle im Kurzschluss/ideale Stromquelle im Leerlauf)
Bei einer realen Quelle kann jedoch nur eine endliche Spannung/Strom auftreten, wesshalb wir Verluste innerhalb der Quelle mit einem Innenwiderstand R_i modellieren.

Definition **Reale Quelle**

Eine reale Quelle bezeichnet eine ideale Quelle mit Vorwiderstand.
Bei einer **Stromquelle** ist der Widerstand **parallel**, bei einer **Spannungsquelle** ist der Widerstand in **Serie**.



1.5 Leistungsanpassung

Definition **Leistung**

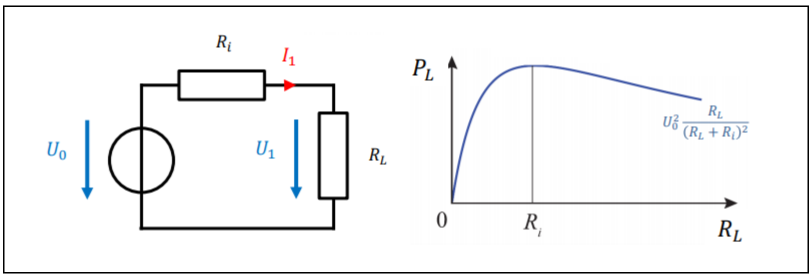
Als Leistung bezeichnen wir das Produkt von Strom und Spannung.
Sie bezeichnet die in einer Zeitspanne umgesetzte Energie an einem Bauteil.

$$P := U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Definition **Maximale Leistung**

Um bei einer realen Quelle maximale Leistung an einen Lastwiderstand abzugeben, muss der Lastwiderstand gleich gross sein wie der Innenwiderstand der Quelle.

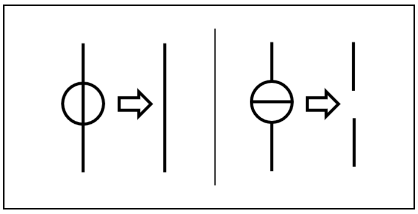
$$R_i = R_L \Rightarrow P = P_{max}$$



Begründung
Die Leistung an einem Lastwiderstand in Serie ist gegeben als:
$P_L = U_L \cdot I_L = \frac{U_L^2}{R_L} = \frac{(U_0 \frac{R_L}{R_L+R_i})^2}{R_L} = U_o^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L+R_i)^2}$
$\frac{d}{dR_L}(P_L) = -U_0^2 \cdot \frac{R_L - R_i}{(R+R_L)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_i \Rightarrow P_L = P_{max}$

1.6 Superpositionsprinzip

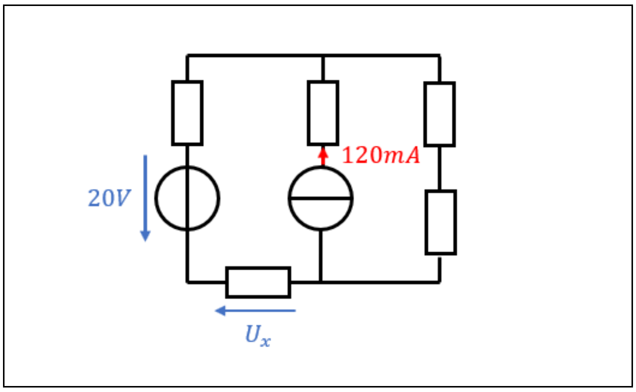
Das Superpositionsprinzip besagt, dass wir bei einem Netzwerk mit mehreren Quellen einzelne Teillösungen in Abhängigkeit von nur einer Quelle berechnen und aufsummieren können.
Dies gilt jedoch nicht für die Leistung, da diese nicht linear ist!
Um das Superpositionsprinzip anzuwenden, müssen wir alle ausser eine Quelle auf "0" setzen.
Spannungsquellen werden also mit **Kurzschlüssen** ersetzt und Stromquellen mit **Leerläufen**.



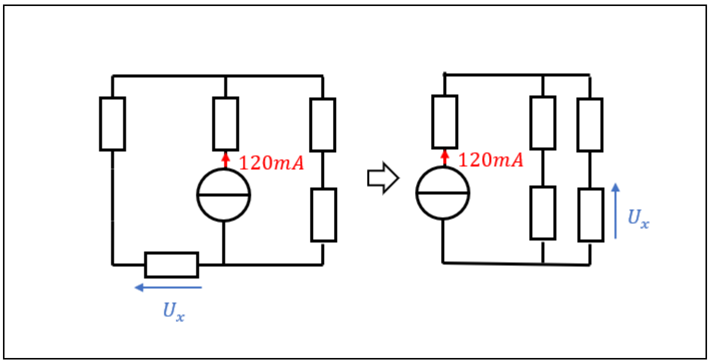
Wieso
Eine Spannungsquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass über diesem Bauteil keine Spannung abfallen darf. Über einem Kurzschluss wird nie eine Spannung abfallen, da dieser als Widerstand mit Wert 0 modelliert werden kann.
Eine Stromquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass durch dieses Bauteil kein Strom fliessen darf. Dies entspricht gerade einem Leerlauf, da dieser als Widerstand mit Wert $\to \infty$ modelliert werden kann.

Beispiel #2

Aufgabe Berechnen sie die Spannung U_x und die Leistung P_x im folgenden Netzwerk, wenn alle Widerstände $R = 100\Omega$ betragen.

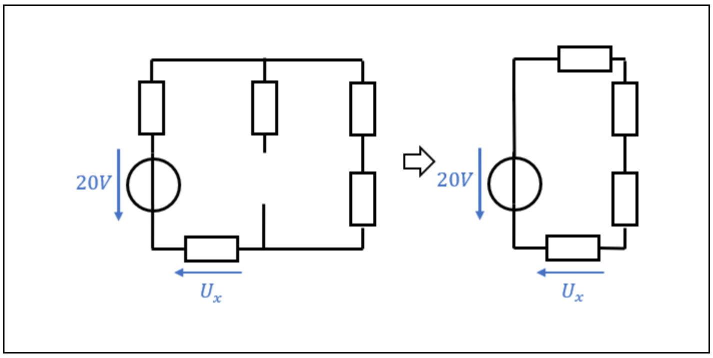


Lösung
Zuerst setzen wir die Spannungsquelle zu 0 und erhalten das folgende ESB



Nun berechnen wir den Strom I_{x_1} durch den Widerstand mithilfe eines Stromteilers:
$I_{x_1} = 60mA$
Die Spannung U_x ist entgegen der Stromrichtung eingezeichnet:
$U_{x_1} = -R_x \cdot I_x = -100 \cdot 60mA = -6V$

Nun setzen wir die Stromquelle zu 0:



Die Spannung U_{x_2} berechnet sich als Spannungsteiler:
$U_{x_2} = 20V \cdot \frac{100\Omega}{400\Omega} = 5V$, $I_{x_2} = \frac{5V}{100\Omega} = 50mA$

Schlussendlich berechnet sich die Spannung als Summe der Teilspannungen:
$U_x = U_{x_1} + U_{x_2} = 5V - 6V = -1V$
Und die Leistung:
$P_x = \frac{{U_x}^2}{R_x} = 1mW$
Welche **nicht** der Summe der Teilleistungen entspricht:
$P_{sum} = P_1 + P_2 = U_{x_1} \cdot I_{x_1} + U_{x_2} \cdot I_{x_2} = 360mW + 250mW = 610mW$

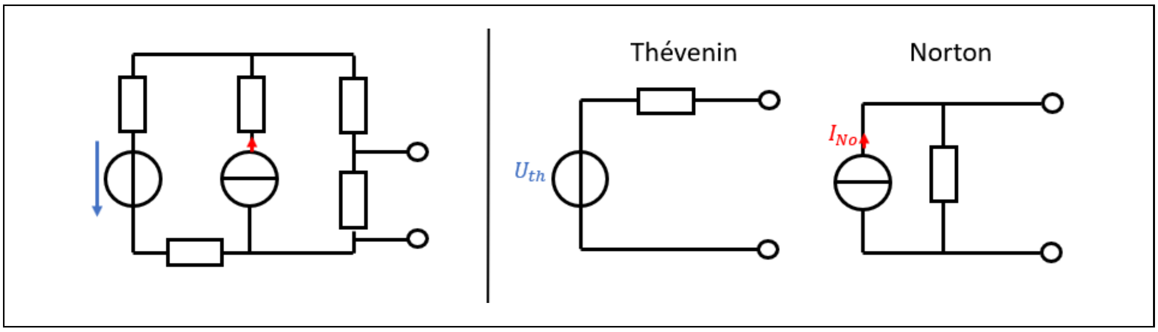
Definition **Thévenin / Norton Äquivalent**

Jedes Netzwerk mit **linearen** Bauelementen und 2 Klemmen lässt sich als reale Quelle darstellen.

Thévenin Äquivalent Darstellung als reale **Spannungsquelle** mit Leerlaufspannung, die an den Klemmen auftritt

Norton Äquivalent Darstellung als reale **Stromquelle** mit Kurzschlussstrom, der an den Klemmen auftritt

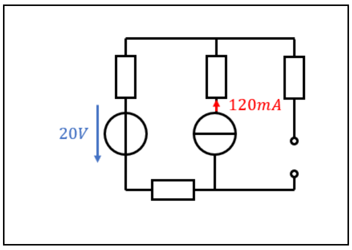
Der Innenwiderstand entspricht dem von außen gemessenen Widerstand, wenn alle Quellen zu 0 gesetzt werden.



Beispiel **#3 - Thévenin Äquivalente Schaltung**

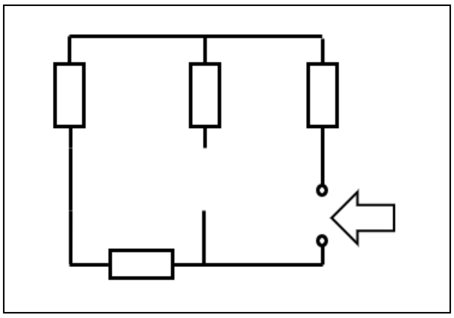
Aufgabe

Geben sie eine Thévenin Äquivalente Schaltung (Innenwiderstand R_i, U_{Th}) für folgende Klemmen an. Alle Widerstände haben Wert 100Ω



Lösung
Zuerst berechnen wir die Leerlaufspannung für die Stromquelle:
$U_{LL_1} = 120mA \cdot 200\Omega = 24V$
Danach die Leerlaufspannung für die Spannungsquelle:
$U_{LL_2} = 20V \cdot \frac{100\Omega}{300\Omega} = 6.67V$
Die Gesamtspannung und somit die Spannung der Ersatzspannungsquelle beträgt:
$\underline{\underline{U_{Th}}} = U_{LL_1} + U_{LL_2} = \underline{\underline{30.67V}}$

Nun müssen wir noch den Innenwiderstand berechnen. Dazu setzen wir alle Quellen zu 0 und berechnen den von aussen gemessenen Widerstand:



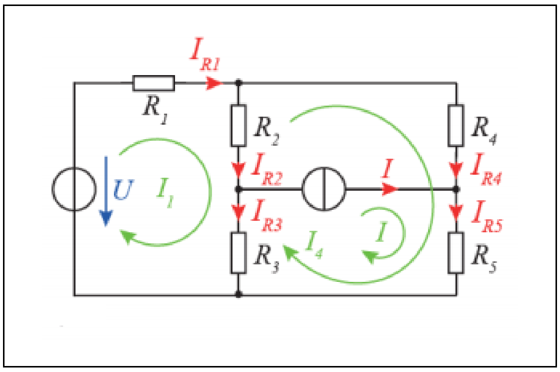
$\underline{\underline{R_i}} = 100\Omega + 100\Omega + 100\Omega = \underline{\underline{300\Omega}}$

1.7 Maschenstromverfahren

Beim Maschenstromverfahren geht es darum, möglichst schnell linear unabhängige Gleichungen zu finden, um alle Grössen im Netzwerk zu berechnen.
Man könnte auch alle Maschen und Knotengleichungen aufstellen und das resultierende Gleichungssystem lösen.
Beide Vorgehen führen zu einem Gleichungssystem, dessen Matrix stets symmetrisch sein muss. Durchgerechnete Aufgaben befinden sich auf der Übungswebseite n.ethz.ch/ zrene/elektrotechnik1.html in den Slides für die Übung 5.

Vorgehen

1. Mache alle Stromquellen unwirksam (Leerlauf!)
2. Bestimme nun die reduzierte Menge E^* aller verbleibenden Elementarmaschen
3. Weise jeder Masche $M_i \in E^*$ einen Maschenstrom I_i zu
4. Füge die Stromquellen wieder ein und ergänze Maschenströme für die Stromquellen (1 pro Quelle!)
5. Stelle für jede Masche $M_i \in E^*$ von Punkt 2 eine Maschengleichung (**Spannungen!**) auf
6. Löse das resultierende Gleichungssystem

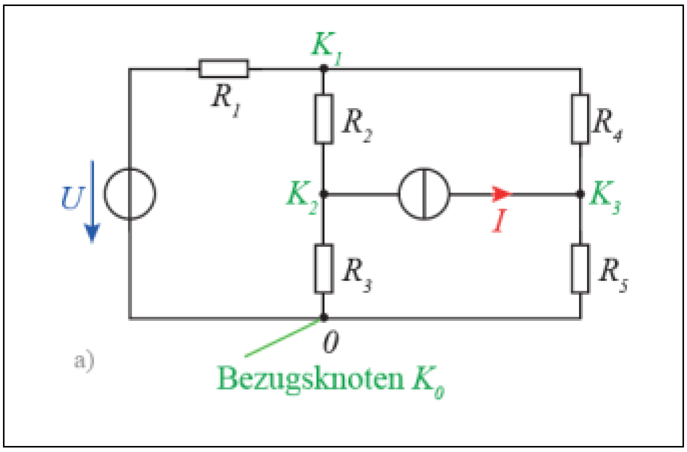


1.8 Knotenpotentialverfahren

Auch hier geht es darum, möglichst schnell linear unabhängige Gleichungen zu finden, um alle Grössen im Netzwerk zu berechnen

Vorgehen

1. Wähle einen Bezugsknoten K_0 (Potential = 0)
2. Mache alle Spannungsquellen aus (Kurzschluss!)
3. Weise allen Knoten (ausser K_0) ein Potential φ_i zu
4. Füge die Spannungsquellen wieder ein: Dabei werden Knoten aufgetrennt in zwei Knoten, einer bekommt Potential φ_i, der andere $\varphi_i + U_i$
5. Stelle für alle Knoten mit unabhängigem Potential eine Knotengleichung auf!
6. Liegt zwischen zwei Knoten nur eine Spannungsquelle, werden diese als einen einzelnen Knoten betrachtet!



2 Lineare Bauelemente

2.1 Kondensator

Definition Kapazität

Die elektrische Kapazität C beschreibt die Fähigkeit eines Bauelementes, Ladung Q bei einer gewissen Spannung U zu speichern.

$$C = \frac{Q}{U} \underbrace{=}_{Plattenkondensator} \varepsilon \frac{A}{d}$$

Die in einer Kapazität gespeicherte Energie berechnet sich als

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2$$

Definition Serienschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Kehrwerte der Kapazität

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{C_i} \Bigg| C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = (C_1 || C_2)$$

Begründung
Die Definition der Kapazität ist genau gegensätzlich zu der des Widerstandes ($R \propto \frac{l}{A}$, $C \propto \cdot \frac{A}{d}$)
Werden Kondensatoren in Serie geschaltet, so vergrößert sich der effektive Abstand der Platten, weshalb wir die Kehrwerte addieren müssen.

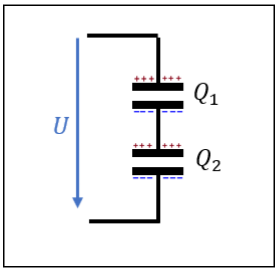
Definition Parallelschaltung von Kapazitäten

Werden mehrere Kapazitäten parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Kapazitäten

$$C_{ges} = \sum_{i=0}^{n} C_i x$$

Definition **Ladungserhaltung in der Serienschaltung**

Werden Kapazitäten in Serie geschaltet, besitzen alle dieselbe Ladung Q.



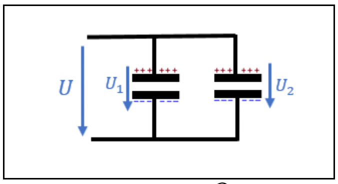
$$\underline{\underline{Q_1 = Q_2 = Q}}$$

Begründung

Damit sich auf dem ersten Kondensator die Ladung Q_1 ansammeln kann, muss diese Ladung unterhalb des Kondensators angesammelt werden. Angenommen, beide Kondensatoren waren zu Beginn ungeladen, so muss die Ladung, welche sich auf der unteren Platte des ersten Kondensators befindet, dieselbe Ladungsmenge auf der oberen Platte des unteren Kondensators hervorrufen.

Definition **Maschenregel bei Parallelschaltung**

Die Maschenregel für Spannung gilt auch bei Kondensatoren



$$\underline{\underline{U_1 = U_2 = U}} \text{ und } C_1 = \frac{Q_1}{U_1} \rightarrow \underline{\underline{Q_1 = C_1 \cdot U}}$$

Definition **Grundlegende Gleichung am Kondensator**

Der Zusammenhang zwischen Strom und Spannung am Kondensator ist wie folgt gegeben

$$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt$$
$$i_c(t) = c \cdot \frac{d}{dt}(u_c)$$

Begründung

Mit dem Wissen, dass Strom definiert ist als die Ladung pro Zeit $\frac{dQ}{dt} = I$ folgt folgendes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(C \cdot U) = \frac{\partial}{\partial t}(Q)$$
$$C \cdot \frac{dU}{dt} = I \rightarrow U(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t I \cdot dt$$

Übersicht

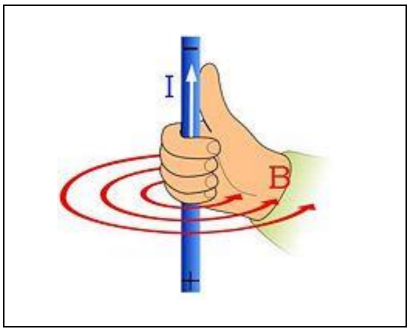
Energie	**Strom und Spannung**	**DC-Verhalten**	**High-AC Verhalten***	**Admitanz***
$C = \frac{Q}{U}$ $W = \frac{1}{2}CU^2$	$u_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)dt$ $i_c(t) = c \cdot \frac{d}{dt}(u_c)$	Leerlauf	Kurzschluss	$\frac{1}{j\omega C}$

2.2 Magnetostatik

Analog zum elektrischen Feld definieren wir ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien Kräfte auf eine bewegte Ladung auswirken.
Auslöser für das magnetische Feld sind **bewegte Ladungen** welche gemäss der rechten Hand Regel ein Magnetfeld hervorrufen, das diese einschliesst.
Im Falle von Stabmagneten oder Ähnlichem ist es der Spin der Elektronen, welcher das stationäre Magnetfeld auslöst*

Definition **Rechte Hand Regel**

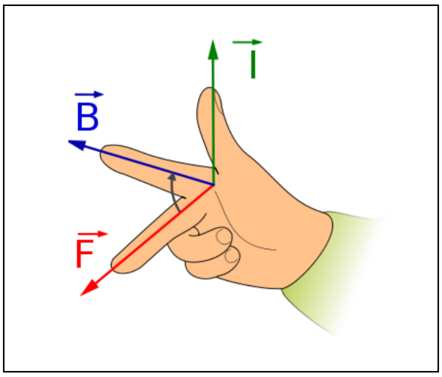
Das Magnetfeld B um einen stromdurchflossenen Leiter baut sich stets gegen den Uhrzeigersinn auf und ist **immer** geschlossen.



Definition **Lorentzkraft**

Bewegte Ladungen in einem Magnetfeld verspüren eine Kraft, welche proportional zur Stärke des B-Feldes und der Geschwindigkeit ist.
Die Kraft steht senkrecht zu den Feld- und Geschwindigkeits-Vektoren.

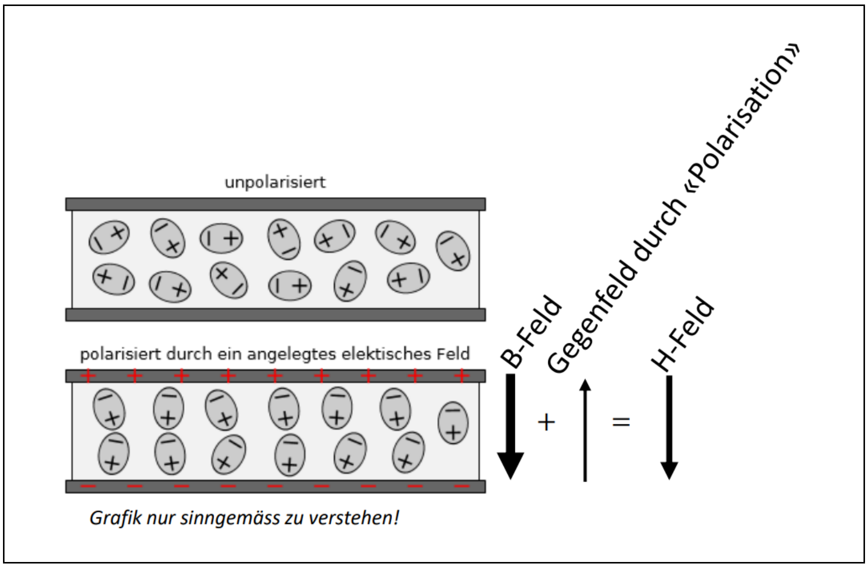
$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$



Definition **H-Feld**

Legen wir ein magnetisches Feld an eine Materie an, so richten sich die eingeschlossenen Teile entgegen dem angelegten Feld aus und " schwächen " dieses.
Das " abgeschwächte " Feld bezeichnen wir als H-Feld und entspricht dem Feld, welches real auf Ladungen wirkt.
Der "Abschwächungsfaktor" $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ wird als Permeabilität bezeichnet.
Das H-Feld verändert sich bei Materialübergängen, das **B-Feld** bleibt **konstant**.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$



Definition **Durchflutungssatz**

Der Durchflutungssatz besagt, dass das Kurvenintegral des H-Feldes über eine beliebige **geschlossene** Kurve gerade dem Wert des durch diese Fläche fließendes Stromes entspricht.
Diesen Wert definieren wir als magnetische Spannung Θ

$$\Theta = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel **#4**

Aufgabe
Berechnen Sie die magnetische Spannung Θ und das H-Feld Feld $\vec{H}$ um einen unendlich langen, mit Strom I durchflossenen Leiter. Der Radius des Leiters sei ρ.

Lösung

Wir wählen als Kurve einen Kreis mit Radius R um unseren Leiter.
Da wir von einem perfekten Leiter ausgehen, treffen wir die Annahme, dass das Magnetfeld achsensymmetrisch und somit konstant entlang des Kreises ist.

Wir erhalten: für $R > \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta}} = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \underline{\underline{I}}$$

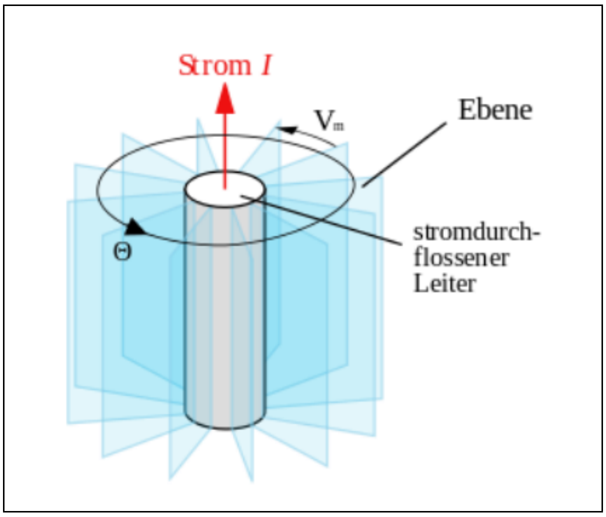
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = I \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi R} \cdot \vec{e_\varphi}}}$$

Für $R < \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta(R)}} = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi \rho^2} \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr = \frac{2 \cdot I}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \underline{\underline{\frac{R^2 \cdot I}{\rho^2}}}$$

$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = \frac{I \cdot R^2}{\rho^2} \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi \rho^2} \cdot R \cdot \vec{e_\varphi}}}$$

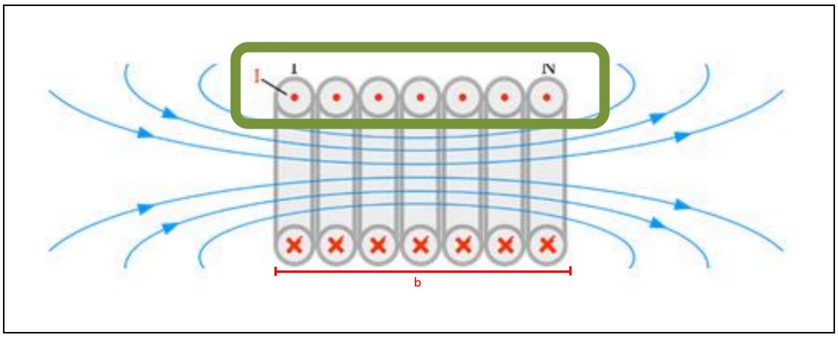
Skizze



Magnetische Spannung innerhalb einer Spule

Analog zu den Berechnungen beim Leiter kann man die magnetische Spannung innerhalb einer Spule berechnen. Unter der Annahme, dass das magnetische Feld ausserhalb des Spule vernachlässigbar ist und die Spule N Windungen hat, erhalten wir für den Fluss durch das Innere einer Spule:

$$\Theta_{Spule} = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = N \cdot I \simeq \int_0^b \vec{H} \cdot d\vec{s}$$



Im folgenden gehen wir davon aus, dass die magnetische Spannung ungefähr $\Theta = \int_0^l \vec{H} d\vec{s}$ entspricht.

Definition **magnetischer Fluss**

Als magnetischen Fluss Φ bezeichnen wir die "Menge B-Feld", welche durch eine gegebene Fläche fliesst.

$$\Phi := \iint_A \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot da$$

Definition **magnetischer Widerstand**

Als magnetischer Widerstand R_m bezeichnen wir das Verhältnis zwischen magnetischer Spannung und magnetischem Fluss
Er sagt etwas darüber aus, wie gross der magnetische Fluss bei einer gegebenen magnetischen Spannung ist.

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} \underbrace{=}_{magn.Leiter} \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Begründung
Wir gehen davon aus, dass die magnetische Spannung über einem Leiter mit Länge l anliegt, dessen Querschnittfläche A ist.

$$\frac{\Theta}{\Phi} = \frac{\int_0^l \vec{H} \cdot d\vec{s}}{\iint_a \vec{B} d\vec{A}} = \frac{l \cdot H}{\mu \cdot A \cdot H} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

2.2.1 Das Reluktanzmodell

magnetische Grössen im Vergleich zu eletrischen

	Elektrisch	Einheit	Magnetisch	Einheit
Leitfähigkeit	κ	$[\frac{1}{\Omega \cdot m}]$	$\mu (= \mu_0 \cdot \mu_r)$	$[\frac{H}{m}]$
Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$[\Omega]$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$	$[\frac{1}{H}]$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$[S]$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$	$[H]$
Spannung	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$[V]$	$\Theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$[A]$
Strom / Fluss	$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$[A]$	$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$	$[Wb]$
Ohmsches Gesetz	$U = R \cdot I$		$\Theta = R_m \cdot \Phi$	
Maschenregel	$U_0 = \sum_{Masche} U_m$		$\Theta (= NI) = \sum_{Masche} \Theta_m$	
Knotenregel	$\sum_{Knoten} I_k = 0$		$\sum_{Knoten} \Phi_k = 0$	

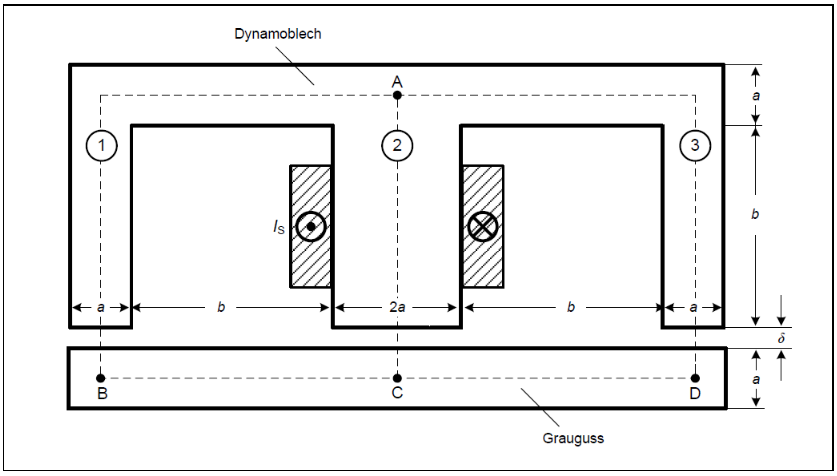
Definition **Reluktanzmodell**

Das Reluktanzmodell besagt, dass man ein magnetisches Ersatzschaltbild mit denselben Rechenregeln wie bei einem elektrischen Netzwerk berechnen kann.
Vorgehen

- Spulen werden mit Spannungsquellen ersetzt $V_m = N \cdot I$
- Magnetkerne/Luftspälte etc. werden mithilfe der Länge und Querschnittsfläche als Widerstände modelliert. $R_m = \mu \frac{l}{A}$
- Für magnetische Widerstände gelten die gleichen Regeln wie bei elektrischen (Seriellschaltung / Paralellschaltung).

Beispiel #5

Aufgabe Hubmagnet
Der mittlere Schenkel 2 eines E-Kernes aus Dynamoblech trägt eine Wicklung mit N Windungen. Über die drei Luftspalten mit gleicher Länge δ wird ein Anker aus Grauguss mit der Kraft FA angezogen E-Kern und Anker besitzen die gleiche Dicke d.



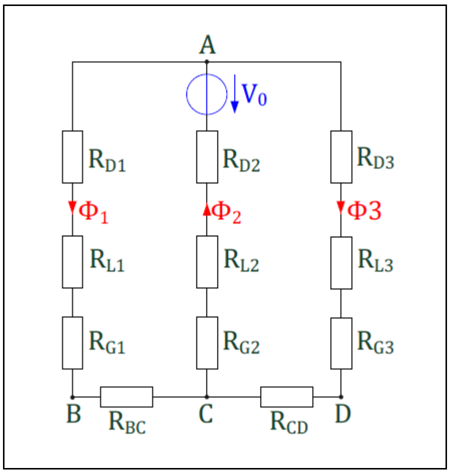
Gegeben sind folgende Parameter:

Windungszahl der Wicklung:	N	=	1000
Magnetische Feldkonstante:	μ_0	=	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
Relative Permeabilität Dynamoblech:	μ_{rD}	=	2000
Relative Permeabilität Gusseisen:	μ_r	=	250
Luftspaltlänge:	δ	=	0.1 mm
Anzugskraft Anker:	F_A	=	150 N
Breite E-Kern und Anker:	a	=	20 mm
Abstand der Schenkel:	b	=	80 mm
Dicke E-Kern und Anker:	d	=	50 mm

Berechnen sie die magnetische Spannung auf dem Weg ACD.

Lösung

Zuerst zeichnen wir ein Reluktanzmodell des Magneten.
Wobei R_L die Luftspälte, R_{Di} die Beine des Magneten und R_{Gi} sowie R_{BC} und R_{CD} das Gusseisenstück modellieren.



Für die Spannungsquelle erhalten wir:

$$V_0 = N \cdot I_s = 1000 \cdot 211.3mA = 211.3A$$

Für die Widerstände:

$$R_{D1} = R_{D3} = \frac{2b+2a}{\mu_0\mu_{rD}ad} = 79.6 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{D2} = \frac{b+\frac{a}{2}}{2\mu_0\mu_{rD}ad} = 17.9 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{L1} = R_{L3} = \frac{\delta}{\mu_0 ad} = 79.6 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{L2} = \frac{\delta}{2\mu_0 ad} = 39.8 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{G1} = R_{G3} = \frac{\frac{a}{2}}{\mu_0\mu_{rG}ad} = 31.8 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{G2} = \frac{\frac{a}{2}}{2\mu_0\mu_{rG}ad} = 15.9 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_{BC} = R_{CD} = \frac{b+\frac{3}{2}a}{2\mu_0\mu_{rG}ad} = 350.1 \cdot 10^3 H^{-1}$$

Weiter können wir die einzelnen Widerstände seriell zusammenfassen:

$$R_1 = R_{D1} + R_{L1} + R_{G1} = 191 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_2 = R_{D2} + R_{L2} + R_{G2} = 73.7 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_3 = R_{D3} + R_{L3} + R_{G3} = 191 \cdot 10^3 H^{-1}$$
$$R_E = R_{BC} = R_{CD} = 350.1 \cdot 10^3 H^{-1}$$

Die Spannung U_{AC} lässt sich als Spannungsteiler berechnen:

$$U_{AC} = U_0 \cdot \frac{((R_1 + R_E)||(R_3 + R_E))}{((R_1 + R_E)||(R_3 + R_E)) + R_2} = 166A$$

Und somit die Spannung U_{AD}:

$$\underline{\underline{U_{AD}}} = 166A \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_E} = \underline{\underline{58.6A}}$$

2.3 Spule und Induktivität

Definition **Induktivität**

Die Induktivität L beschreibt, wieviel magnetischer Fluss Φ sich bei einem Strom I im Inneren eines Bauteiles aufbaut.

$$L := \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$

Die in einer Induktivität gespeicherte Energie berechnet sich zu

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Definition **Serien und Parallelschaltung**

Induktivitäten verhalten sich analog zu Widerständen:

Serienschaltung

$$L_{serie} = \sum_{i=0}^{n} L_i$$

Parallelschaltung

$$\frac{1}{L_{ges}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{L_i} \Bigg|_{L_{p_2}} = (L_1 || L_2)$$

Übersicht

Energie	Strom und Spannung	DC-Verhalten	High-AC Verhalten*	Admitanz*
$L = \frac{N\Phi}{I}$ $W = \frac{1}{2} L I^2$	$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_c(t) dt$ $u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(i_c)$	Leerlauf	Kurzschluss	$j\omega L$

3 Transiente Vorgänge

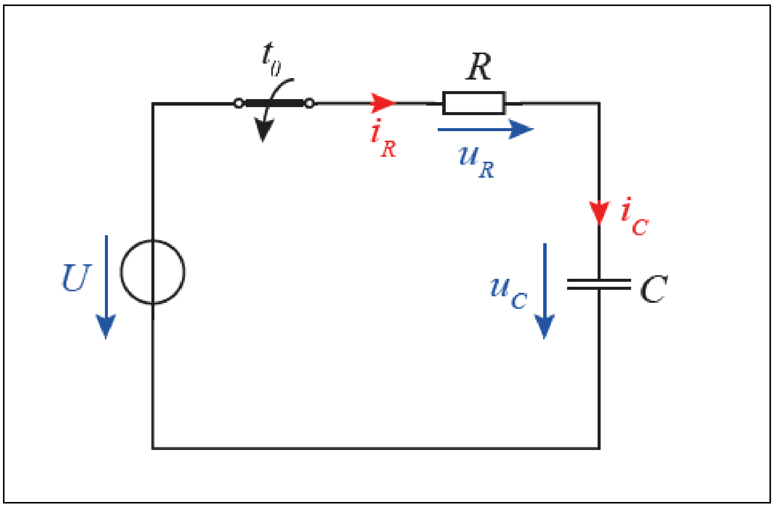
Transiente Vorgänge sind Ein- oder Ausschaltvorgänge von Schaltungen.

3.1 Kondenstor

Wir betrachten nun Netzwerke mit einer Quelle, welche einen Innenwiderstand und einen Kondensator enthalten.
Das Netzwerk besitzt einen Schalter, womit die Quelle an das Netzwerk angeschlossen oder davon entfernt werden kann.
Sollt das Netzwerk aus mehreren Quellen und Widerständen bestehen, so kann mittels Thévenin/Norton Umformung eine einfachere Form erreicht werden.

Definition **Transiente am Kondensator**

Es sei ein Netzwerk der folgenden Form gegeben:



Der Schalter werde zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.
Die Spannung am Kondensator beträgt:

$$\boxed{U_C(t) = U_C(\infty) - [u_C(\infty) - u_C(t_0)] \cdot e^{(-\frac{t-t_0}{RC})}}$$

Wobei $u_C(\infty)$ die Spannung über dem Kondensator nach dem Einschwingen bezeichnet $(= U)$ und $u_C(t_0)$ die Kondensatorspannung vor dem Schliessen des Schalters.

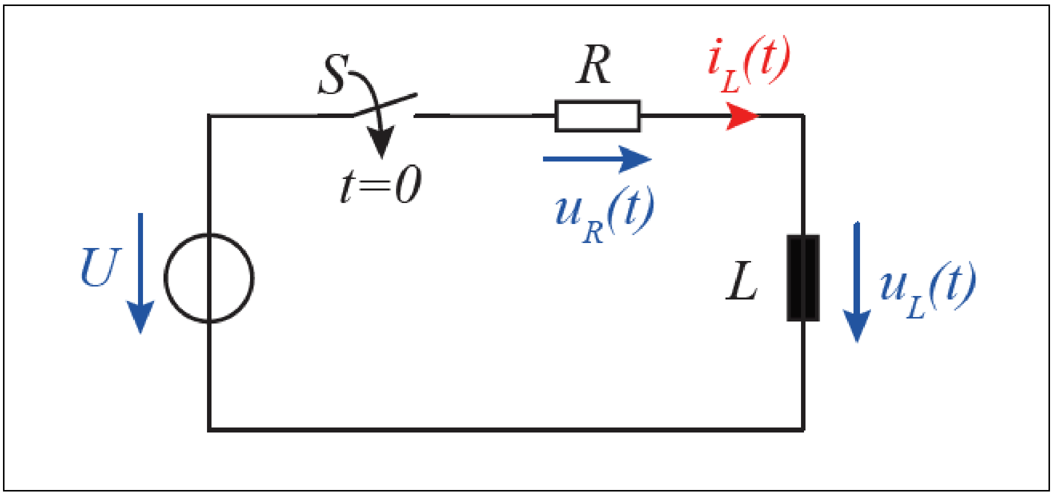
Begründung
Wir stellen eine Maschengleichung auf:
$U = u_R + u_c = i_C \cdot R + u_C = C \cdot R \dfrac{d}{dt}(u_c) + u_c$
Wir berechnen die hmogene Lösung:
$\frac{d}{dt}(u_c) + \frac{1}{RC} u_c = 0$
$u_{c,hom} = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$
Danach die partikuläre Lösung mit Ansatz $u_c = A + Bt$:
$RC \frac{d}{dt}(u_c) + u_c = U \rightarrow RC \cdot B + (A + Bt) = U$
$\rightarrow u_c(t) = U$
Als Endlösung erhalten wir:
$u_c(t) = U + A \cdot e^{(-\frac{t}{RC})}$

3.2 Induktivität

Wir betrachten nun Netzwerke mit einer Quelle, welche einen Innenwiderstand und eine Induktivität enthalten.
Das Netzwerk besitzt einen Schalter, womit die Quelle an das Netzwerk angeschlossen oder davon entfernt werden kann.
Sollt das Netzwerk aus mehreren Quellen und Widerständen bestehen, so kann mittels Thévenin/Norton Umformung eine einfachere Form erreicht werden.

Definition **Transiente an der Induktivität**

Sei ein Netzwerk der folgenden Form gegeben:



Der Schalter werde zum Zeitpunkt $t = t_0$ geschlossen.
Der Strom durch die Induktivität berechnet sich wie folgt:

$$i_L(t \to \infty) - [i_L(t \to \infty) - i_L(t \to t_0)]e^{-R\frac{t-t_0}{L}}$$

Wobei $i_L(t \to \infty)$ den Strom durch die Spule nach dem Einschwingen bezeichnet $(= \frac{U}{R})$ und $i_L(t \to t_0)$ den Strom durch die Spule vor dem Schliessen des Schalters.

4 Komplexe Wechselstromrechnung

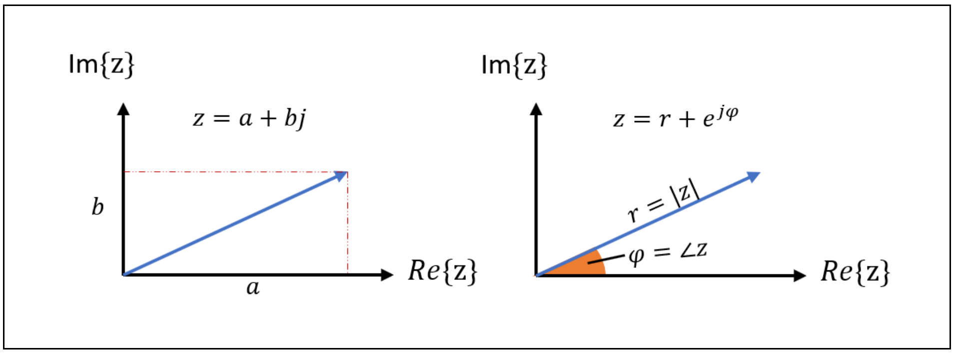
4.1 Komplexe Zahlen

Nachfolgend werden alle komplexen Variablen durch einen Unterstrich symbolisiert $\underline{Z}$

Definition **Polarform**

Die Polarform beschreibt eine komplexe Zahl mithilfe der Länge und dem Winkel eines Zeigers. Folgende Zusammenhänge sind gegeben:

$$\underline{z} = a + bj \underbrace{=}_{Polarform} |\underline{z}| \cdot e^{j \cdot arg(\underline{z})} = r \cdot e^{j \cdot \varphi}$$



Definition **Argument einer komplexen Zahl**

Das Argument einer komplexen Zahl bezeichnet den Winkel, welche zwischen dem Zeiger in der komplexen Ebene und der X-Achse eingeschlossen wird.
Bei einer komplexen Zahl $\underline{Z} = a + bj$ wird es folgendermassen berechnet:

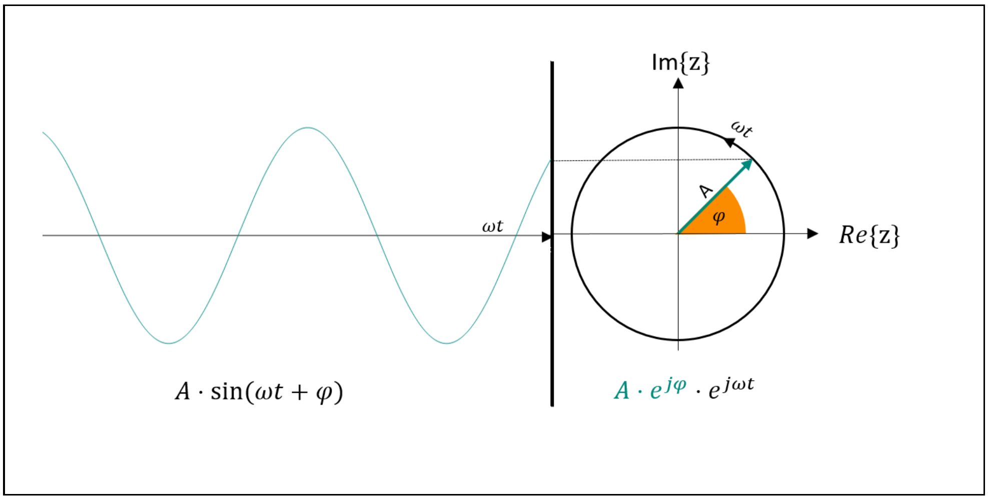
Bedingungen	Argument
$a > 0$	$Arg(\underline{Z}) = \angle\underline{Z} = tan^{-1}(\frac{b}{a})$
$a < 0$ & $b \geq 0$	$Arg(\underline{Z}) = \angle\underline{Z} = tan^{-1}(\frac{b}{a}) + \pi$
$a < 0$ & $b < 0$	$Arg(\underline{Z}) = \angle\underline{Z} = tan^{-1}(\frac{b}{a}) - \pi$

4.2 Zeiger

Zusammenhang komplexe Exponentialfunktion und Sinus

Jeder Sinus kann als komplexe Exponentialfunktion geschrieben werden.

$$A \cdot sin(\omega t + \varphi) = Im\{\underline{Z} \cdot e^{j\omega t}\}$$



Wir bezeichnen den **zeitunabhängigen Zeiger** mit Länge A und Winkel φ als **komplexen Zeiger** (engl. Phasor).
Zusammen mit der Kreisfrequenz ω können wir den ihm zugrundeliegenden Sinus erhalten.

Definition **Zeiger**

Ein **Zeiger** symbolisiert eine Sinusfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$.
Folgende Eigenschaften gelten für einen komplexen Zeiger $\underline{\hat{u}}$

- $\underline{\hat{u}}$ ist zeitunabhängig
- $\underline{\hat{u}}$ ist eine komplexe Grösse
- $|\underline{\hat{u}}|$ entspricht dem Amplitudenwert des zugrunde liegenden Sinus
- $\angle \underline{\hat{u}}$ entspricht der Phasenverschiebung des Sinus

Definition **Effektivwert und Gleichrichtwert**

Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert einer T-periodischen Funktion entspricht dem gemittelten Betrag über eine Periode

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|dt$$

Effektivwert

Der Effektivwert einer T-periodischen Funktion entspricht der 2-Norm gemittelt über einer Periode.

Er ist wichtig, da eine Gleichspannungsquelle mit dem Effektivwert der Wechselspannung gerade gleich viel Energie an einem Widerstand umsetzt, wie die Wechselspannung selbst.

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$$

Symbole und Bedeutung

Nachfolgend sind ein paar Grössen aufgelistet, welche in Aufgaben und/oder Büchern verwendet werden. Sie beziehen sich stets auf ein sinusförmiges Eingangssignal.

Eingangssignal: $u(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$

Symbol	Bedeutung
$\hat{u}$	Spitzen/Amplitudenwert des Sinus. $(= A)$
U	Effektivwert. Entspricht bei Sinusgrössen $\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$
$\underline{U}$	komplexer Zeiger (Effektivwert) mit Phase. $(= U \cdot e^{j\varphi t})$
$\underline{\hat{u}}$	komplexer Zeiger (Spitzenwert) mit Phase. $(= \hat{u} \cdot e^{j\varphi t})$

Definition **Komplexer Raum**

Als Komplexen Raum bezeichne ich* den **zeitunabhängigen** Raum der komplexen Zeiger.
In diesem Raum werden zeitliche Ableitungen zu Multiplikationen und Integrale zu Brüchen.
Zwischen dem komplexen Raum und dem realem Raum sind folgende Zusammenhänge gegeben:

Realraum		komplexer Raum
$u(t) = A \cdot sin(\omega t + \varphi)$	$\Rightarrow$	$\underline{U} = \frac{A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi t}$
$u(t) = \sqrt{2} \cdot \lvert\underline{U}\rvert sin(\omega t + \angle \underline{U})$	$\Leftarrow$	$\underline{U}$

Bauteil	Realraum	komplexer Raum
Widerstand R	$u(t) = R \cdot i(t)$	$\underline{U} = R\underline{I}$
Kapazität C	$u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt$	$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I}$
Induktivität L	$u(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$	$\underline{U} = j\omega L \cdot \underline{I}$

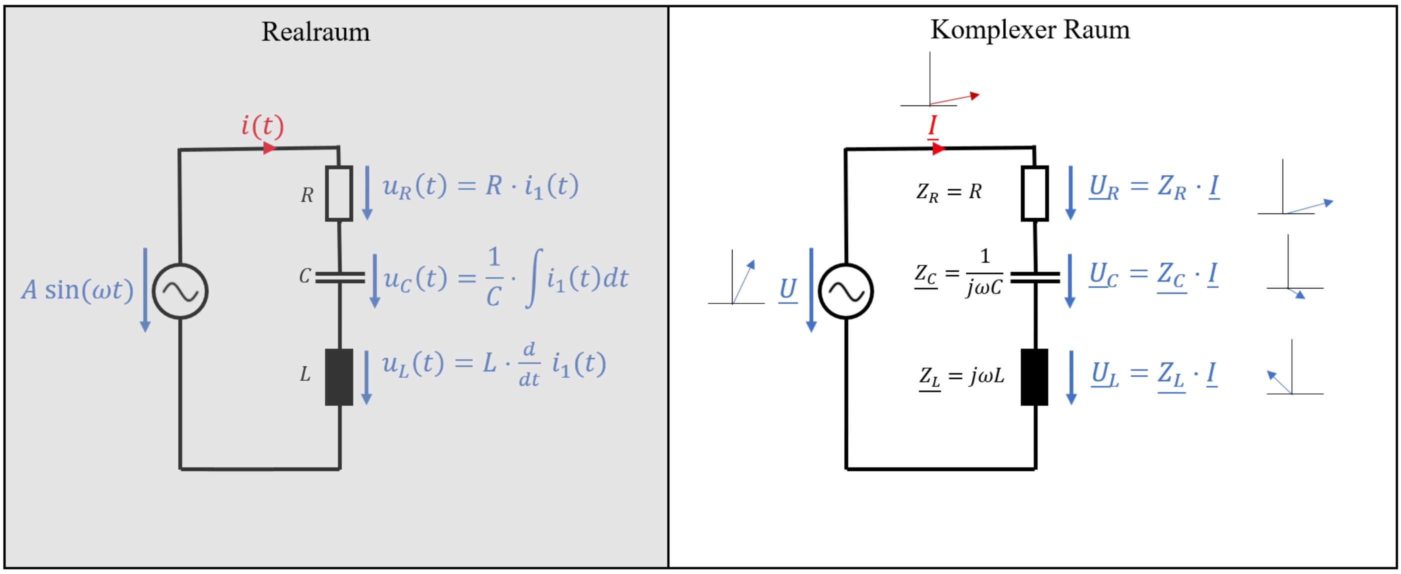
Definition **Impedanz**

Als Impedanz $\underline{Z}$ bezeichnen wir eine komplexe Zahl, welche Strom und Spannung im komplexen Raum über einem gewissen Bauteil in Verbindung setzt.
Umgangssprachlich wird sie auch als allgemeiner Widerstand bezeichnet.

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}}$$

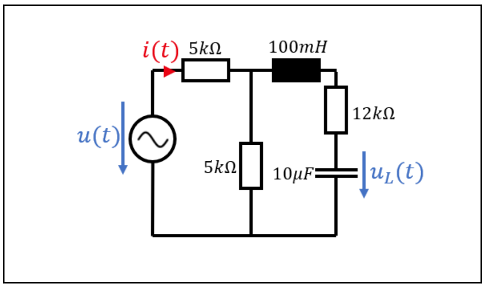
Bauteil	Impedanz
Widerstand R	$\underline{Z} = R$
Kapazität C	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$
Induktivität L	$\underline{Z} = j\omega L$

Mithilfe der Impedanz und den komplexen Zeigern können wir sämtlichen Grössen wie gewohnt berechnen, solange wir uns im komplexen Raum befinden.
Sämtliche gewohnten Konzepte wie Maschenregel, Knotenregel, Spannungs-/Stromteiler etc. können wie gewohnt angewandt werden.
Möchten wir also ein Netzwerk mit Wechselströmen berechnen, so transformieren wir zuerst das gesamte Netzwerk in den komplexen Raum, berechnen dort die gesuchten Grössen und transformieren danach das Ganze wieder zurück.



Beispiel #6

Berechnen sie im folgenden Schaltbild der von der Quelle gelieferten Strom $i(t)$ und die Spannung über dem Kondensator $u_L(t)$ bei einer Eingangsspannung von $u(t) = 12V sin(100\pi \cdot t)$



Lösung

Zuerst transformieren wir sämtliche Grössen in den komplexen Raum:
$\underline{U} = \frac{12}{\sqrt{2}}$, $\omega = 50\pi$, $\underline{Z_C} = \frac{2000}{j \cdot \pi}\Omega$, $\underline{Z_L} = 5 \cdot \pi \cdot j\Omega$
Nun berechnen wir den Gesamtwiderstand der Schaltung:
$\underline{Z_{ges}} = 5k\Omega + (5k\Omega || \underline{Z_L} + \underline{Z_C} + 12k\Omega) = 8531 - 53.64j = 8531.5e^{-0.006 \cdot j}$
$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z_{ges}}} = \frac{12}{\sqrt{2} \cdot 8531.5} e^{0.006 \cdot j} = 0.000995 \cdot e^{0.006 \cdot j} A$
$\Rightarrow \underline{\underline{i(t)}} = \underline{\underline{6 \cdot sin(100\pi \cdot t + 0.34^\circ)}} mA$
Für die Spannung $u_L(t)$:
Zuerst berechnen wir die Spannung über der Serienschaltung von Induktivität, Widerstand und Kondensator:
$\underline{U}_{serie} = \underline{U} \cdot \frac{(5k\Omega || \underline{Z_L} + \underline{Z_C} + 12k\Omega)}{\underline{Z_ges}} = (4.2423 - 0.0167)V = 4.242 \cdot e^{-0.00392 \cdot j} V$
Daraus folgt für $\underline{U_L}$:
$\underline{U_C} = \underline{U}_{serie} \cdot \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_C} + 12k\Omega} = (0.0108 - 0.2245)V = 0.225 \cdot e^{-0.1.523 \cdot j} V$
$\Rightarrow U_C(t) = 318 \cdot sin(100\pi \cdot t - 87.26^\circ) mV$

4.3 Zeigerdiagramm

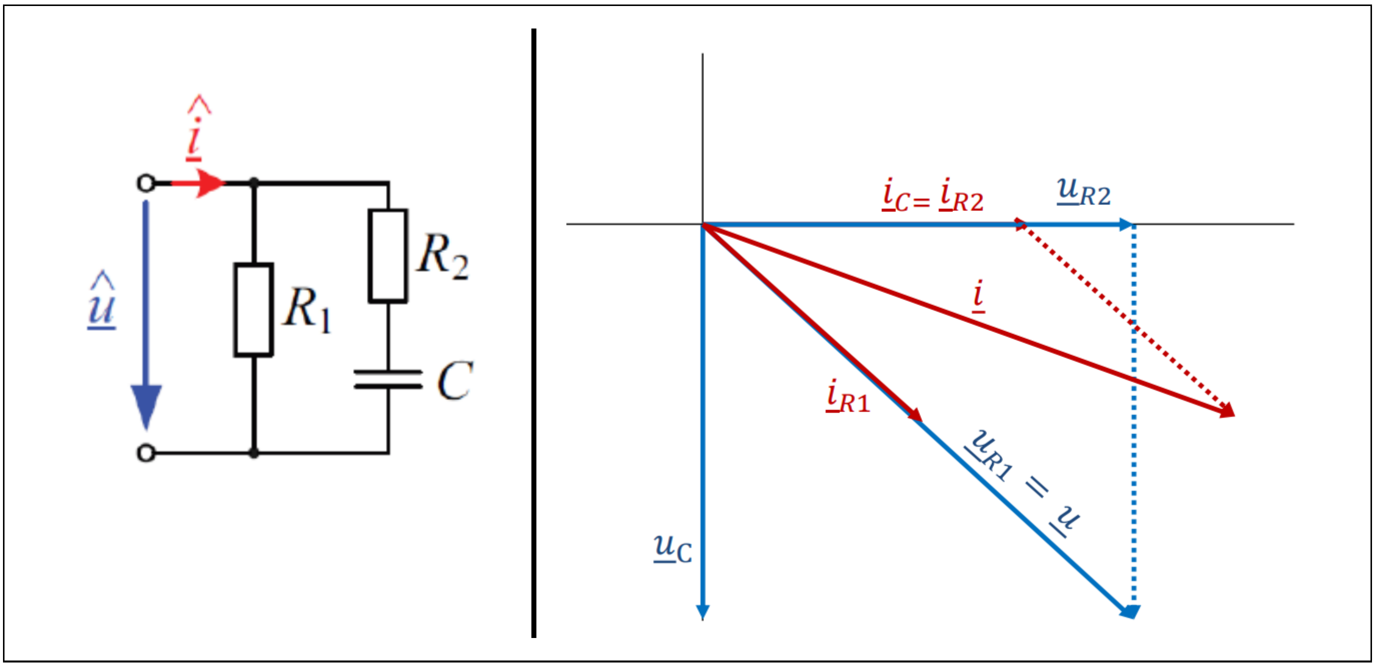
Als Zeigerdiagramm bezeichnen wir die Darstellung aller Spannungen/Ströme einer Schaltung in der komplexen Ebene.
Dabei müssen nicht alle Zeiger im Ursprung liegen, sie können auch beliebig verschoben werden. Einzig die Länge und der Phasenwinkel sind relevant.
Maschen- und Knotenregel müssen auch im Zeigerdiagram erfüllt sein. Dabei handelt es sich nun um Vektoradditionen der einzelnen Zeiger.

Vorgehen
Falls sämtliche Zeiger bereits berechnet wurden:
Alle Zeiger in Polarform umformen und vom Ursprung aus einzeichnen.

Sonst:

1. Wähle einen Massstab für Strom und Spannung. Achte darauf, dass auch der Zeiger mit der grössten Amplitude noch ins Bild passt. Falls alle Zeiger in nur einem Quadranten zu liegen kommen, kann möglicherweise der Rest des Plots weggelassen werden. Dies sieht man schnell anhand der Phasenverschiebung.
2. Wähle einen Zeiger als Referenzzeiger. Zeichne ihn auf der reellen Achse ein.
3. Alle anderen Zeiger werden nun der Reihe nach eingezeichnet, dabei müssen sie entsprechend ihrer Phasenverschiebung zum Referenzzeiger gedreht und entsprechend dem gewählten Massstab in der Länge skaliert werden. Es empfiehlt sich daher, die Phase aller Zeiger im Gradmass auszurechnen.
4. Beim Zeichnen können und sollen bekannte Beziehungen wie die Maschen- und die Knotenregel unbedingt beachtet werden. Auch bekannte Winkel zwischen Strom und Spannung an den Bauteilen (-90,0 oder 90 Grad) können das Zeichnen deutlich vereinfachen.
5. Zeiger können beliebig verschoben werden. Lediglich ihre Richtung und Länge ist entscheidend. Es macht also Sinn, die Zeiger möglichst intuitiv anzuordnen.

Beispiel einer Schaltung und Zeigerdiagramm (i_{R2} und U_{R2} als Referenzzeiger)



4.4 Komplexe Leistung

Definition **Komplexe Leistung**

Für eine beliebige Spannung $\underline{U}$ und Strom $\underline{I}$ definieren wir die komplexe Leistung $\underline{S}$ als :

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underbrace{P}_{Wirkleistung} + \underbrace{jQ}_{Scheinleistung}$$

Definition **Wirkleistung P**

Als Wirkleistung bezeichnen wir Leistung, welche real von einem Verbraucher aufgenommen und in andere Leistungen (z. B. mechanische, thermische oder chemische) umgewandelt wird.

$$P = Re\{\underline{S}\}$$

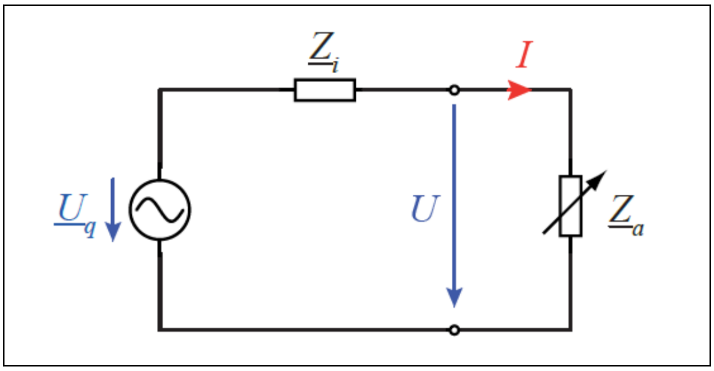
Definition **Scheinleistung/Blindleistung Q**

Als Schein-/Blindleistung bezeichnen wir Leistung, welche nur kurzfristig von einem Bauteil aufgenommen wird. Scheinleistung pendelt stets zwischen Quelle und Verbraucher hin und her und ist grundsätzlich unerwünscht.

$$Q = Im\{\underline{S}\}$$

Definition **Leistungsanpassung**

Um maximale Leistung aus einem Netzwerk zu beziehen, muss der Lastwiderstand so gewählt werden, dass er gerade dem komplex konjugiertem der Innenimpedanz der Schaltung entspricht.

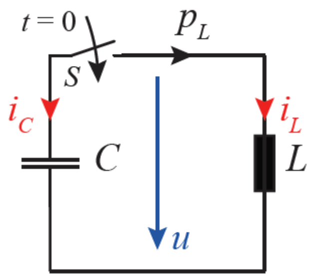


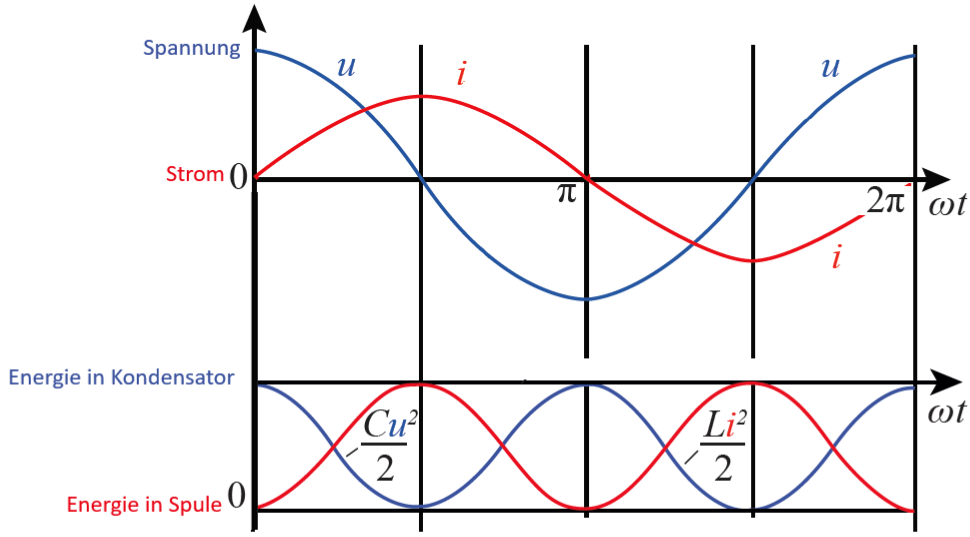
$$\underline{Z_a} = \underline{Z_i}^*$$

Begründung
Wir möchten die Wirkleistung P maximieren und gleichzeitig die Blindleistung Q minimieren.
Für maximale Wirkleistung benötigen wir einen gleich grossen Lastwiderstand wie Innenwiderstand $(Re\{\underline{Z_a}\} = Re\{\underline{Z_i}\})$
Um die Scheinleistung zu minimieren, müssen wir den Imaginärteil der Gesamtimpedanz minimieren, sodass $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in Phase sind.
$Im\{\underline{Z_a} + \underline{Z_i}\} = 0 \Rightarrow Im\{\underline{Z_a}\} = -Im\{\underline{Z_i}\}$

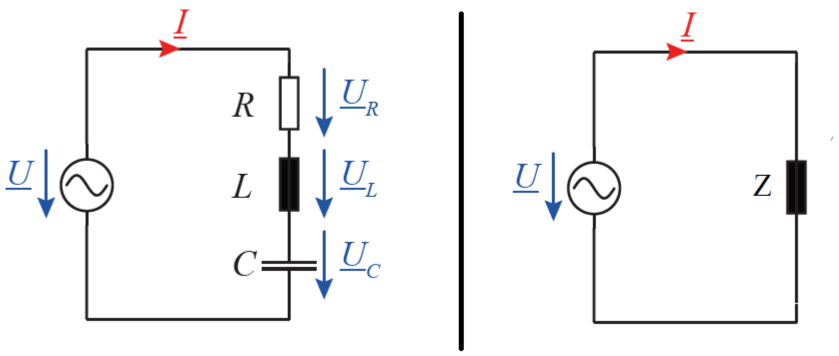
4.5 Schwingkreise

Elektronische Bauelemente wie Kondensator und Spule speichern lediglich Energie, verbrauchen diese aber nicht. Hängen wir einen Kondensatoren und eine Spule zusammen, so pendelt die Energie vom einem Bauteil zum anderen. Dieses Verhalten bezeichnen wir als Schwingkreis.





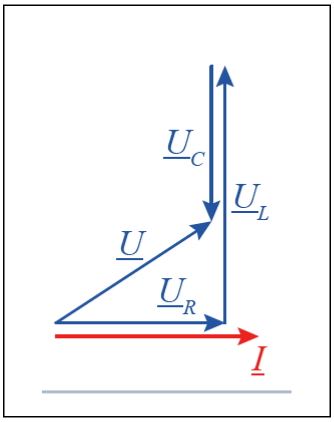
Wir können nun die Schaltung mit einem Widerstand und einer Spannungsquelle erweitern:



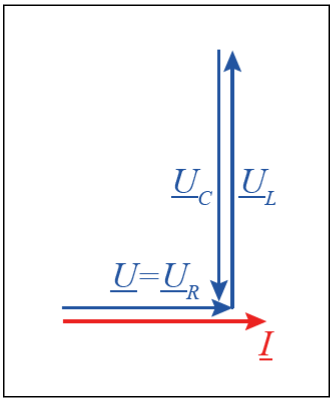
Ersetzen wir die Serienschaltung mit einer Impedanz, so erhalten wir für $\underline{Z}$:

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Der Imaginärteil unserer Impedanz hängt also von der Frequenz unserer Quelle, der Kapazität und der Induktivität ab.
Im allgemeinen Fall erhalten wir folgendes Zeigerdiagramm:



Für den Fall, dass wir $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ wählen, wird die Impedanz rein reell. Das Zeigerdiagramm sieht folgendermassen aus:



Innerhalb dieser Schaltung treten massive hohe Spannungen (U_L, U_C) auf, welche von aussen **nicht messbar** sind und meist grösser als die Eingangsspannungen/Ströme sind.
Dieses Verhalten bezeichnen wir als Resonanzverhalten.

Definition **Resonanzfrequenz**

Betreiben wir eine Schaltung, welche sowohl eine Induktivität wie auch eine Kapazität beinhaltet, so existiert eine Eigenfrequenz bei welcher das System zu schwingen beginnt und die Spannungen oder Ströme über den Spulen/Kondensatoren rein imaginär wird.
Dies geschieht, sobald die Impedanz der Schaltung rein reell wird.
Die Frequenz ω_r, bei welcher dieses Verhalten auftritt, lässt sich wie folgt berechnen:
Alle Elemente sind Seriell / Parallel geschaltet

$$\omega_r := \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Bei einer Mischung aus seriell- / Parallelschaltungen

$$Im\{\underline{Z}(\omega_r)\} = 0 \Rightarrow \omega_r = ?$$

Definition **Güte**

Ein Mass dafür, wie gut ein Schwingkreis ist, ist die Güte Q. Sie ist definiert als das Verhältnis der im Schwingkreis gespeicherten Energie W_{ges} und dem Energieverlust pro Periode ΔW.
Der Gütefaktor sagt uns, wie stark ein System **gedämpft** ist bzw. wie schnell **Energie verloren geht**.
Zusätzlich sagt er etwas darüber aus, wie viel grösser die Spannungsüberhöhung im Verhältnis zur Eingangspsannung ist.

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_{ges}}{|\Delta W|} \underbrace{=}_{Q \gg 1} \frac{U_L}{U}$$