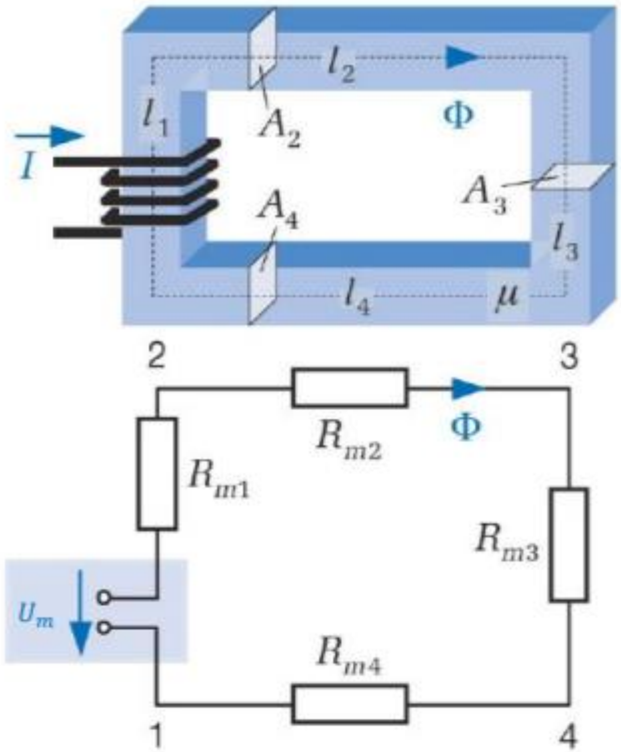
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Elektrotechnik I

Übung 8
Schaltungen mit reaktiven Elementen

Recap: Reluktanzmodell



$$V_m := \theta = N \cdot I$$

$$R_m := \frac{l}{\mu_0 \mu_r \cdot A}$$

$$\Phi := \frac{V_m}{R}$$

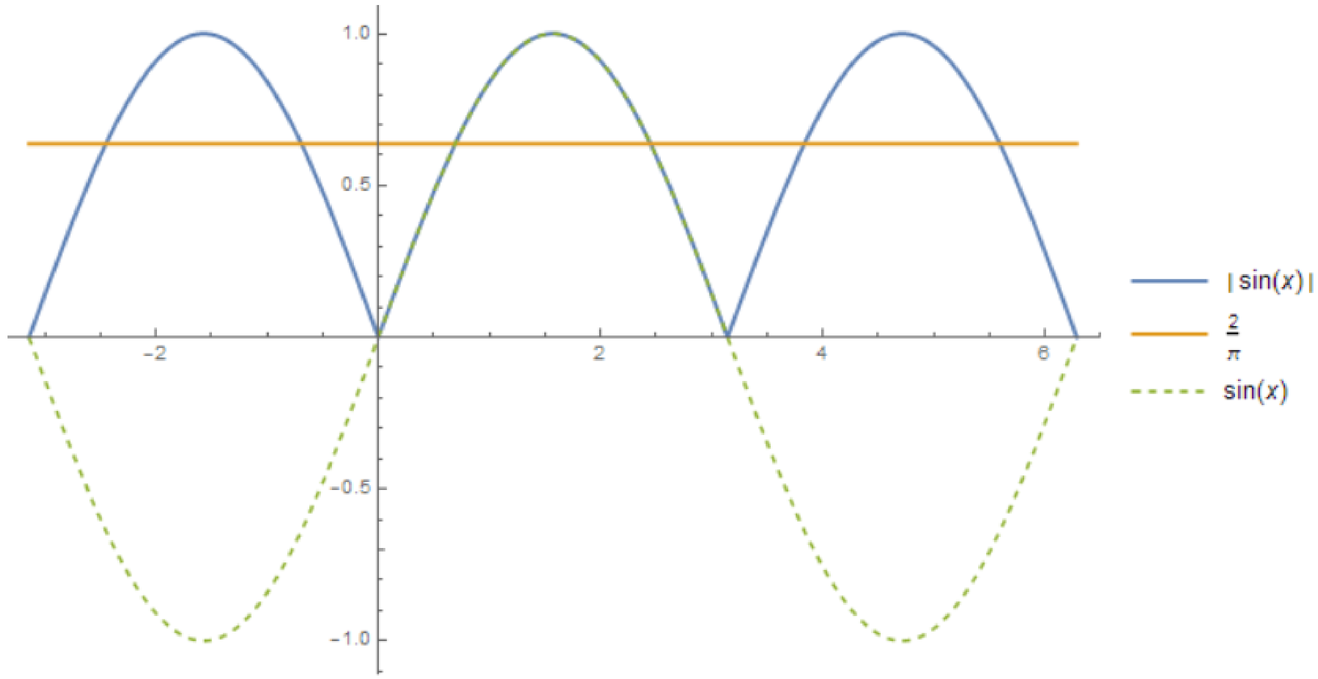
Recap: Induktivität

Wie viel magnetischer Fluss Φ baut sich bei einem bestimmten Spulenstrom I im Kernmaterial auf?

$$L := N\frac{\Phi}{I} = \frac{N^2}{R_m}$$

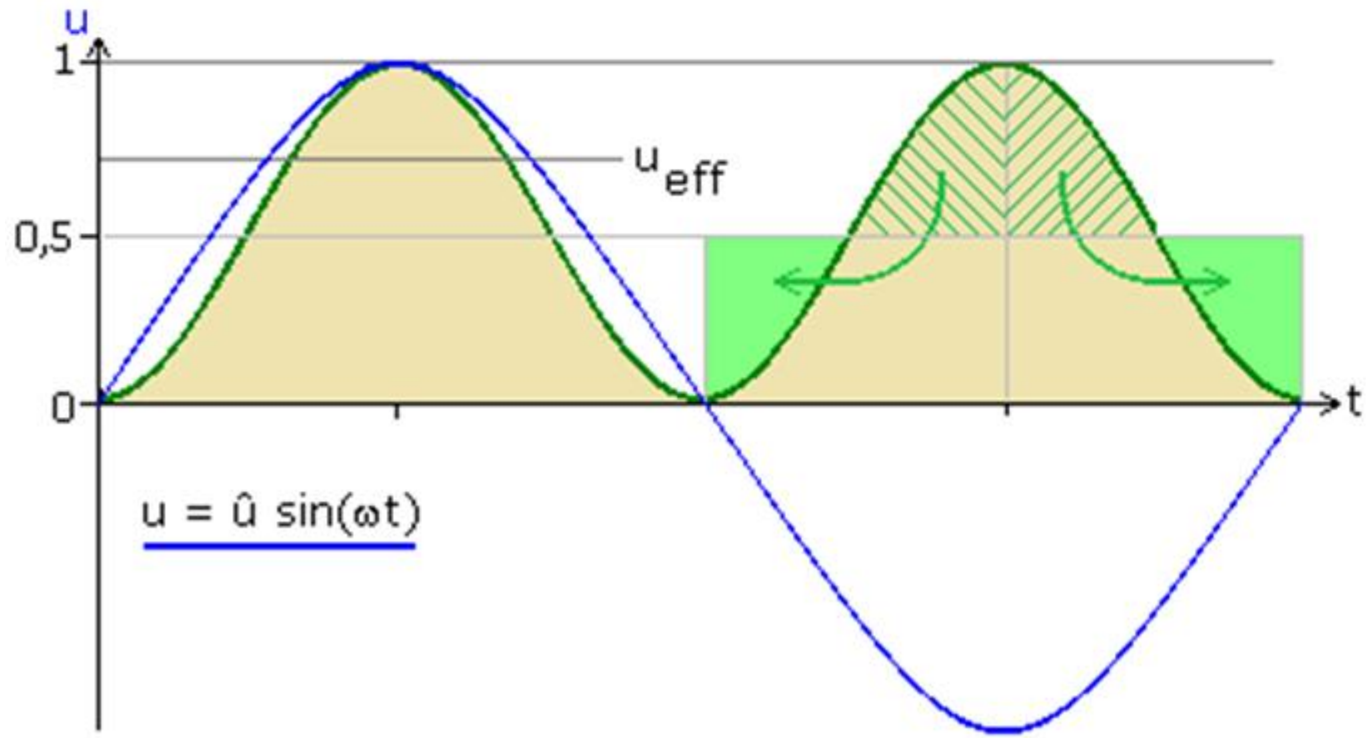
$$W_m := \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Gleichrichtwert



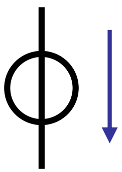
$$\overline{|i|} := \frac{1}{T}\int_0^T |i|\, dt = \frac{2}{\pi}\hat{\imath}$$

Effektivwert

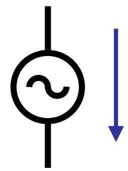


$$u_{eff} := \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt} = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}$$

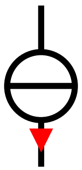
Übergang zu sinusförmigen Spannungen und Strömen



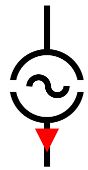
$u(t) = U_0 = \text{const.}$



$u(t) = U_0 \cos \omega t$



$i(t) = I_0 = \text{const.}$



$i(t) = I_0 \cos \omega t$

DC («direct current»)

Gleichstrom

AC («alternating current»)

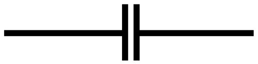
Wechselstrom

➔ Wie verhalten sich unsere Netzwerke unter Wechselströmen?

Widerstand R

Induktivität L

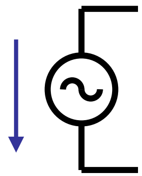
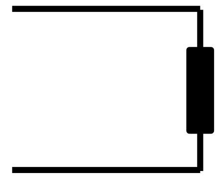
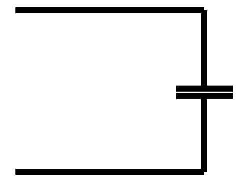
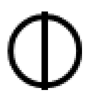
Kapazität C



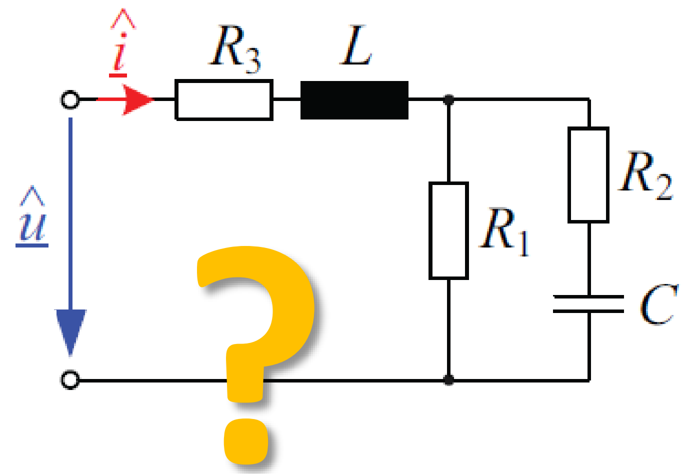
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

HPE
Laboratory for High Power Electronic Systems

Kapazität und Induktivität an Wechselspannung

	Induktivität	Kapazität
$u(t) = U_0 \cos \omega t$ 		
Gleichungen	$u_L(t) = L \frac{\partial i(t)}{\partial t}$ $i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t)\, dt$	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t)\, dt$ $i_C(t) = C \frac{\partial u(t)}{\partial t}$
$\omega \rightarrow 0$ (Gleichstrom) 	$i_L(t) \rightarrow \infty$ $u_L(t) \rightarrow 0$ Kurzschluss	$i_C(t) \rightarrow 0$ $u_C(t) \rightarrow u(t)$ Leerlauf
$\omega \rightarrow \infty$ (Wechselstrom) 	$i_L(t) \rightarrow 0$ $u_L(t) \rightarrow u(t)$ Leerlauf	$i_C(t) \rightarrow \infty$ $u_C(t) \rightarrow 0$ Kurzschluss

Wie würden wir ein solches Netzwerk berechnen?



→ **Differentialgleichungen?**

Beispiel linke Masche: $R_3\hat{\imath} + L\frac{\partial}{\partial t}\hat{\imath} + R_1\hat{\imath}_? = \hat{u}$

Wir erhalten sehr mühsame Differentialgleichungen.
Für grössere Netzwerke ist dieser Weg nicht praktikabel!

→ **Komplexe Wechselstromrechnung!**

Diese Methode liefert uns eine einfache Methode, um auch komplizierte Netzwerke ohne DGL zu berechnen.
Es werden allerdings komplexe Zahlen benötigt ☺

Idee

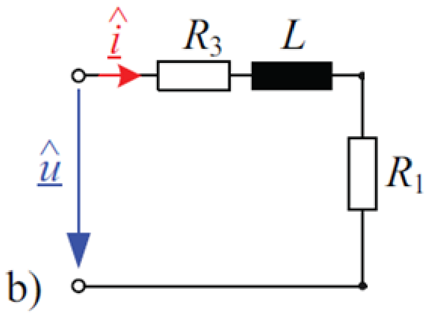
Verwende komplexe Funktion für die Spannung / Strom

$$\rightarrow \underline{u}(t) := A_0 \cdot e^{j\omega t}$$

Effekt

Sämtliche Differentialgleichungen fallen weg, da zeitliche Ableitung zur Multiplikation mit jω wird

$$\frac{d}{dt}\underline{u}(t) = j\omega \cdot \underline{u}(t) \;/\; \frac{d}{dt}\underline{i}(t) = j\omega \cdot \underline{i}(t)$$



Alt

$$R_3\hat{\imath} + L\frac{\partial}{\partial t}\hat{\imath} + R_1\hat{\imath} = \hat{u}$$

→ Löse Differentialgl.

Neu

$$R_3\hat{\imath} + L \cdot j\omega\hat{\imath} + R_1\hat{\imath} = \hat{u}$$

$$\rightarrow \hat{\imath}(t) = \frac{\hat{u}(t)}{R_3 + L \cdot j\omega + R_1}$$

- Um die komplexe Wechselstromrechnung anzuwenden, müssen wir unsere Spannung / Strom als komplexe Funktion schreiben

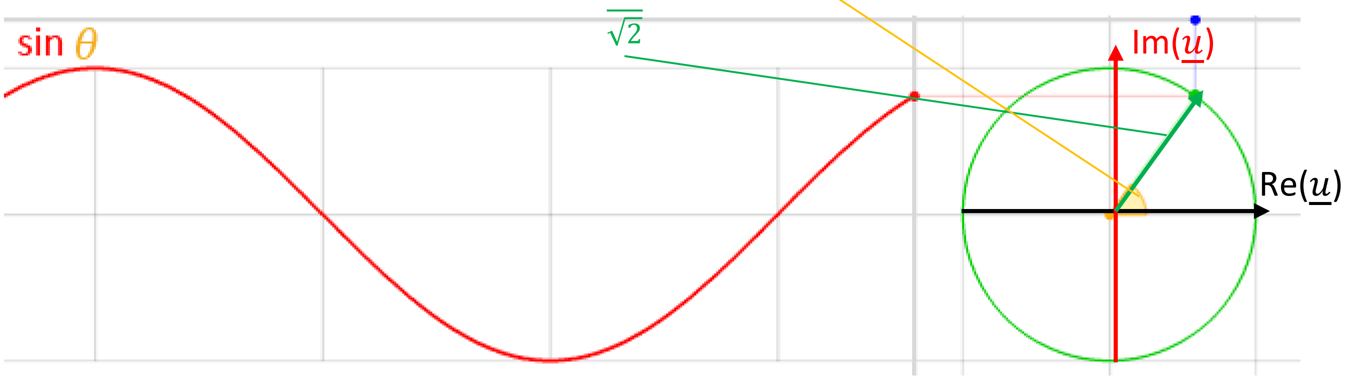
$$\text{Es gilt: } A \cdot \sin(\omega t) = \sqrt{2} \cdot Im\left\{\frac{A}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t}\right\}$$

Komplexer Zeiger *(zum Zeitpunkt t_0)*

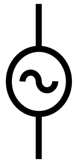
$$\underline{u} = \underline{u} \cdot e^{j\varphi}$$

Amplitude $\frac{A}{\sqrt{2}}$

Phase



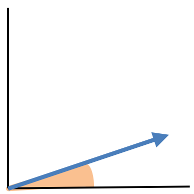
Der komplexe Zeiger

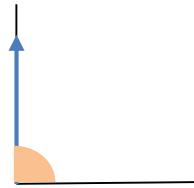


$$u(t) = 2V \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$$

Transformation in komplexe Zeiger

$$\rightarrow \hat{u}(t) = \underline{u} \cdot e^{j\omega t} = \underbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{6}j}\right)}_{\text{Komplexer Zeiger}} \cdot e^{j\omega t}$$

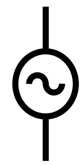




$$\underline{u} = \left(5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}j}\right), \omega = 2\pi$$

Transformation in reelle Schwingung

$$\rightarrow \mathrm{u}(t) = \sqrt{2}\, Im\left\{\underline{u} \cdot e^{j2\pi t}\right\} = 5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$5 \cdot \sqrt{2}\, V \cdot \cos(2\pi t)$$

Wir gehen davon aus, dass sämtliche Ströme und Spannungen mit der gleichen Frequenz schwingen

→ Die komplexen Zeiger reichen für sämtliche Rechnungen im Netzwerk.
Am Schluss benötigen wir die Grundfrequenz um wieder Reelle Funktionen zu erhalten

→ Wir sind nur an der Phasendifferenz **zwischen den Zeigern** und ihrer **Längen** interessiert

Impedanz (der «verallgemeinerte Widerstand»)

Widerstand R | Induktivität L | Kapazität C

Impedanz: $\underline{Z} = R$ | $\underline{Z} = j\omega L$ | $\underline{Z} = 1/j\omega C$

Die Admittanz ist immer das Inverse der Impedanz, also $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

Herleitung:

$$u_L(t) = L\frac{\partial i(t)}{\partial t} \qquad u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$\underline{u_L}(t) = \underbrace{L \cdot j\,\omega}_{\underline{Z}} \cdot \underline{i_L}(t) \qquad \underline{u_C}(t) = \underbrace{\frac{1}{C} \cdot \frac{1}{j\omega}}_{\underline{Z}} \cdot \underline{i_c}\,(t)$$

Impedanz (der «verallgemeinerte Widerstand»)

	Widerstand R	Induktivität L	Kapazität C

Impedanz:	$\underline{Z} = R$	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Z} = 1/j\omega C$

Die Admittanz ist immer das Inverse der Impedanz, also $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$

$\omega \to 0$ (Gleichstrom)	Kurzschluss	Leerlauf	Deckt sich mit vorherigen Überlegungen!
$\omega \to \infty$ (Wechselstrom)	Leerlauf	Kurzschluss	

Mit Impedanzen können wir genau gleich rechnen wie mit Widerständen! Es gelten die bekannten Regeln (Knoten-, Maschen-, Strom- und Spannungsteilerregel etc.)

Phasenverschiebungen

Zeiger

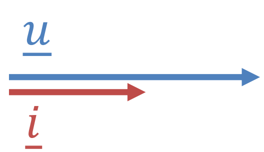
Ohmsches Gesetz für Impedanzen: $\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$ $\underline{i} = \underline{Y} \cdot \underline{u}$

Widerstand R

$\underline{Z} = R$

Strom und Spannung
<u>**in Phase**</u>

$\Delta\varphi = 0$

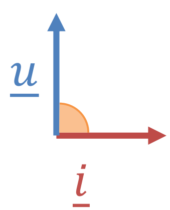


Induktivität L

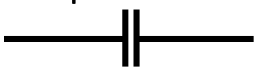
$\underline{Z} = j\omega L$

In Induktivit<u>**äten**</u> die
Ströme sich versp<u>**äten**</u>

$\Delta\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$



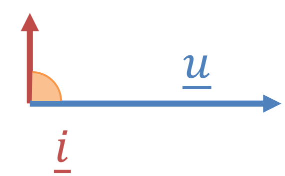
Kapazität C



$\underline{Z} = 1/j\omega C$

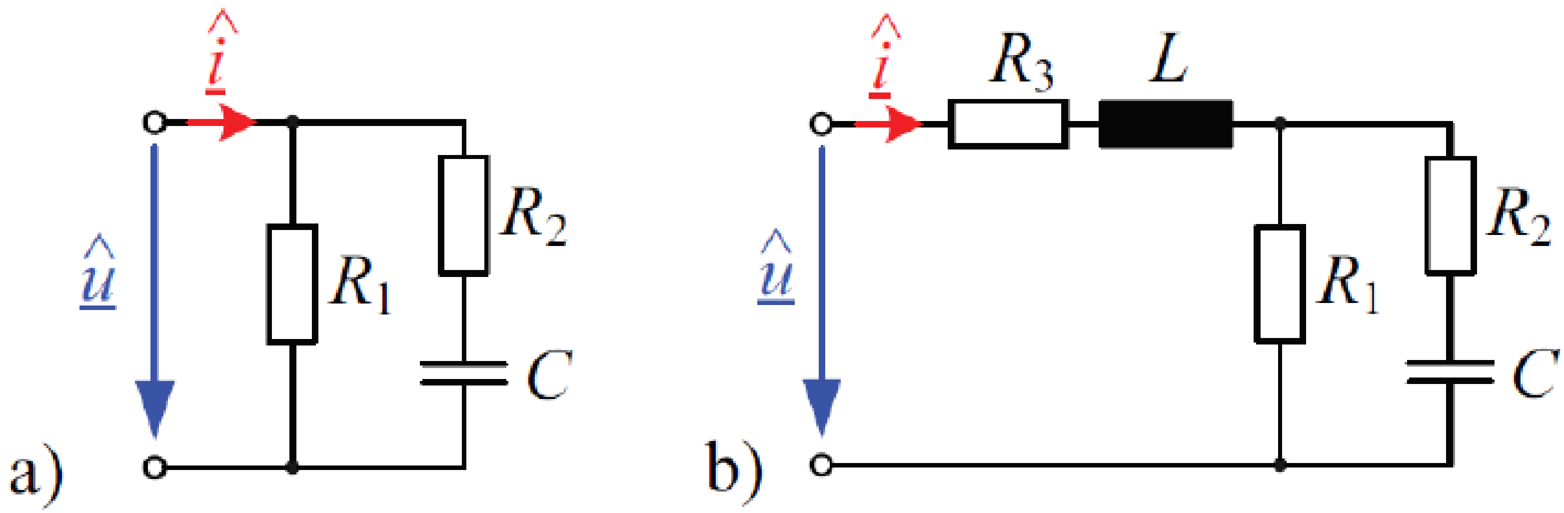
Der Strom eilt v<u>**or**</u>
im Kondensat<u>**or**</u>

$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

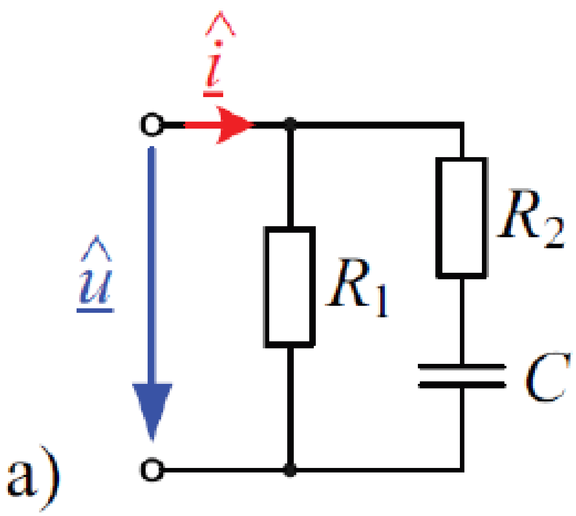


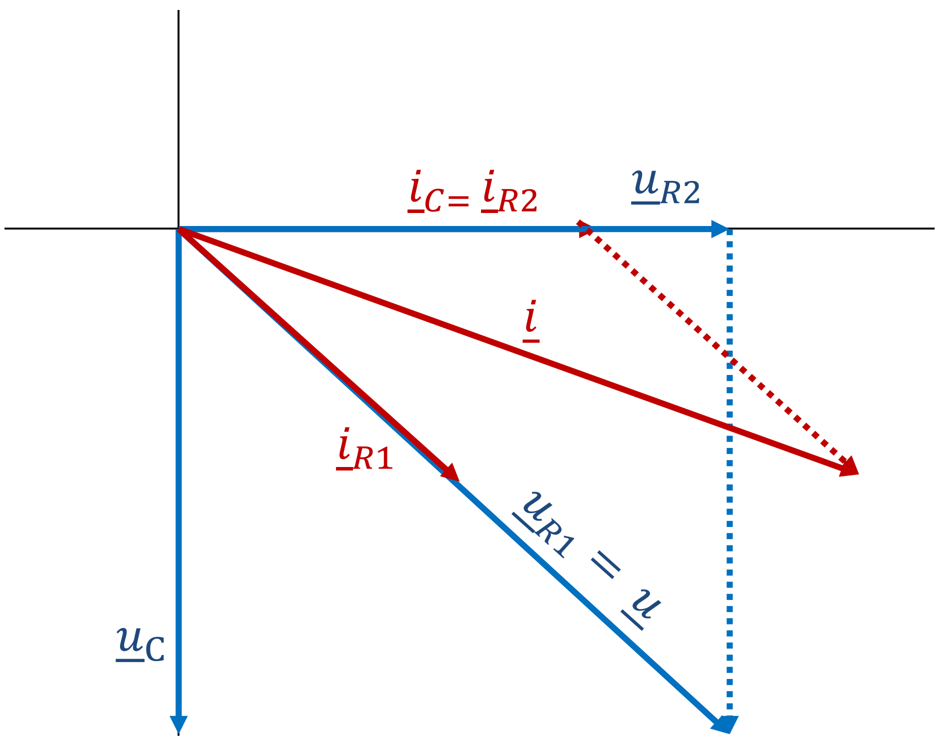
Die gegebene Schaltung, bestehend aus den Wirkwiderständen $R_1 = 2\ \mathrm{k\Omega}$ und $R_2 = 500\ \Omega$, sowie der Kapazität $C = 1\ \mu\mathrm{F}$, wird von einer Sinusspannungsquelle mit der Amplitude $\hat{u} = 50\sqrt{2}\ \mathrm{V}$ und der Frequenz $f = 50\ \mathrm{Hz}$ versorgt.

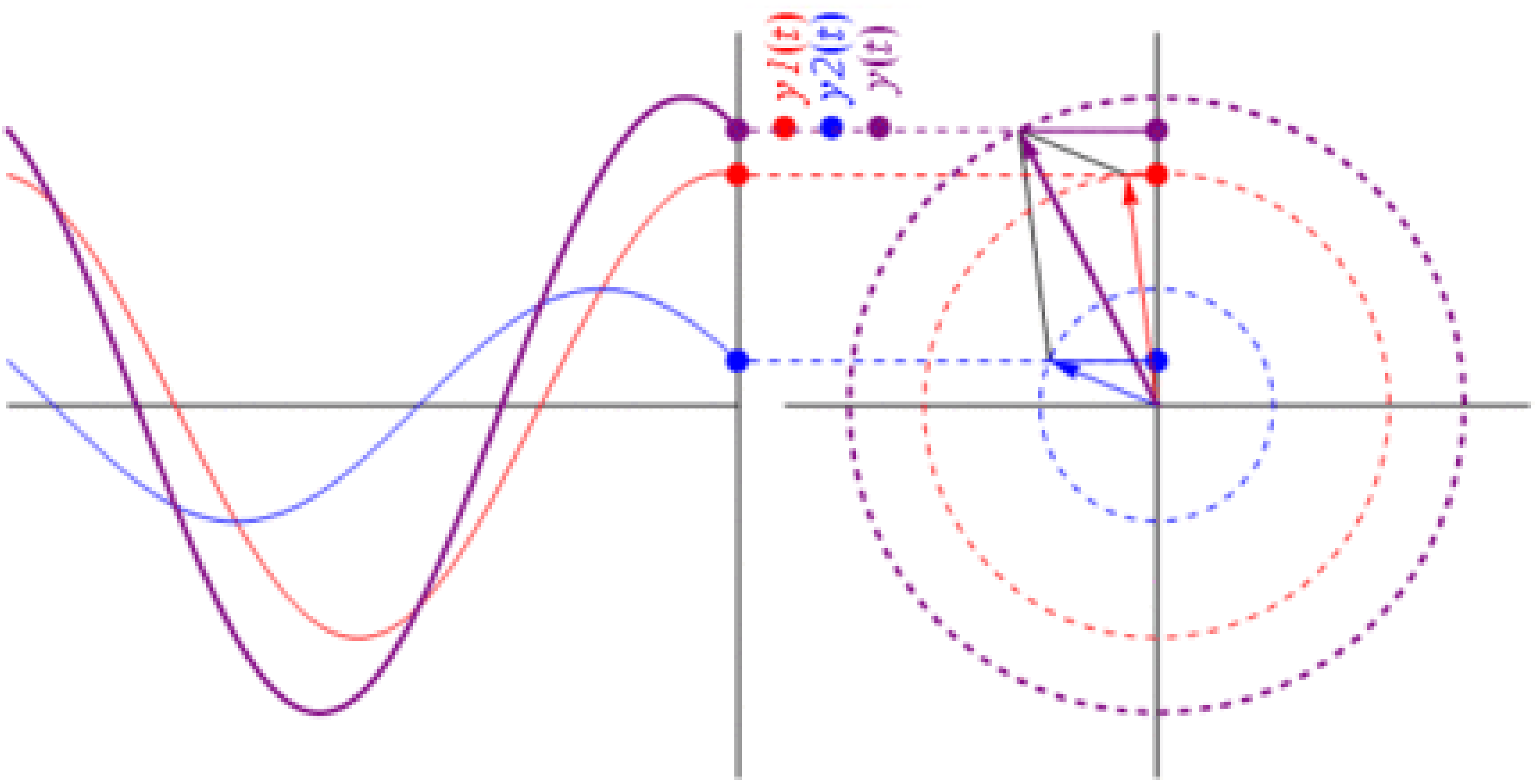
1. Bestimmen Sie den Strom $\underline{i}$ im Netzwerk a)
2. Welcher Strom $\underline{i}$ tritt auf, wenn gemäss Schaltung b) der Wirkwiderstand $R_3 = 500\ \Omega$ und die Induktivität $L = 0.5\ \mathrm{H}$ vor die Schaltung a) geschaltet werden?



Zeigerdiagramme






y1(t)
y2(t)
y(t)