

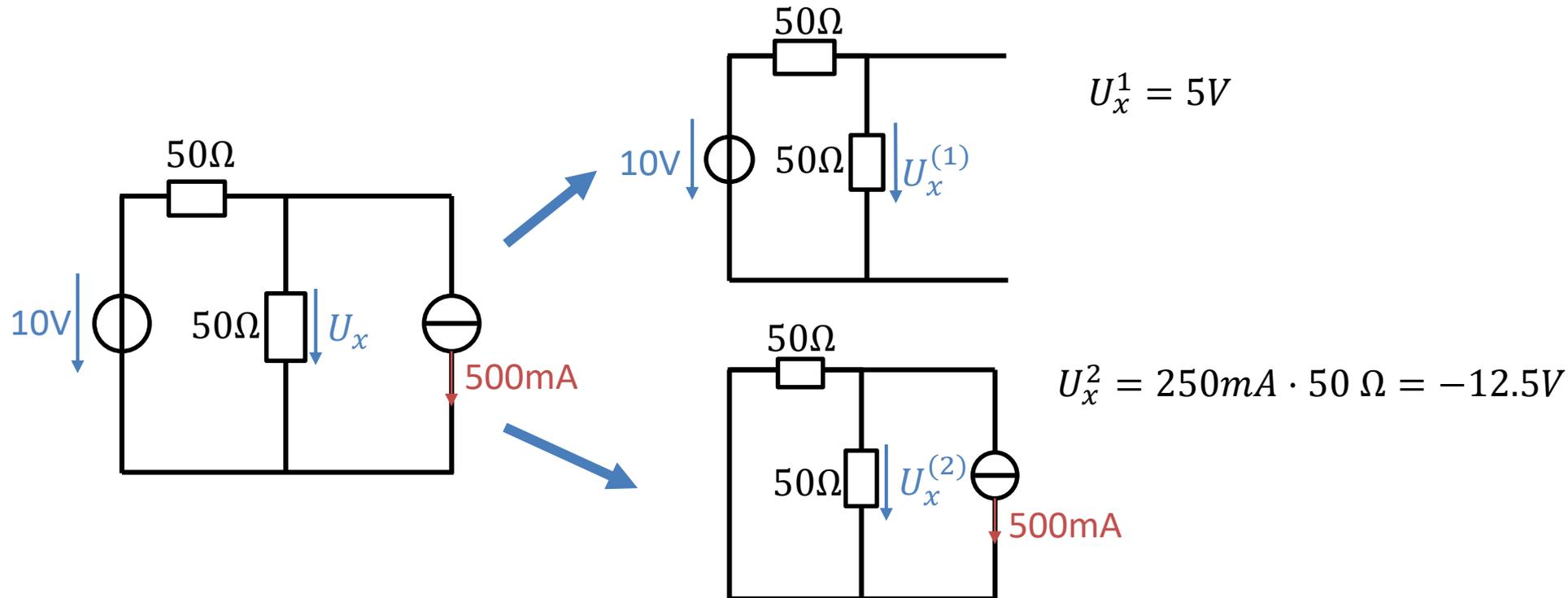
Elektrotechnik I

Übung 5 Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren



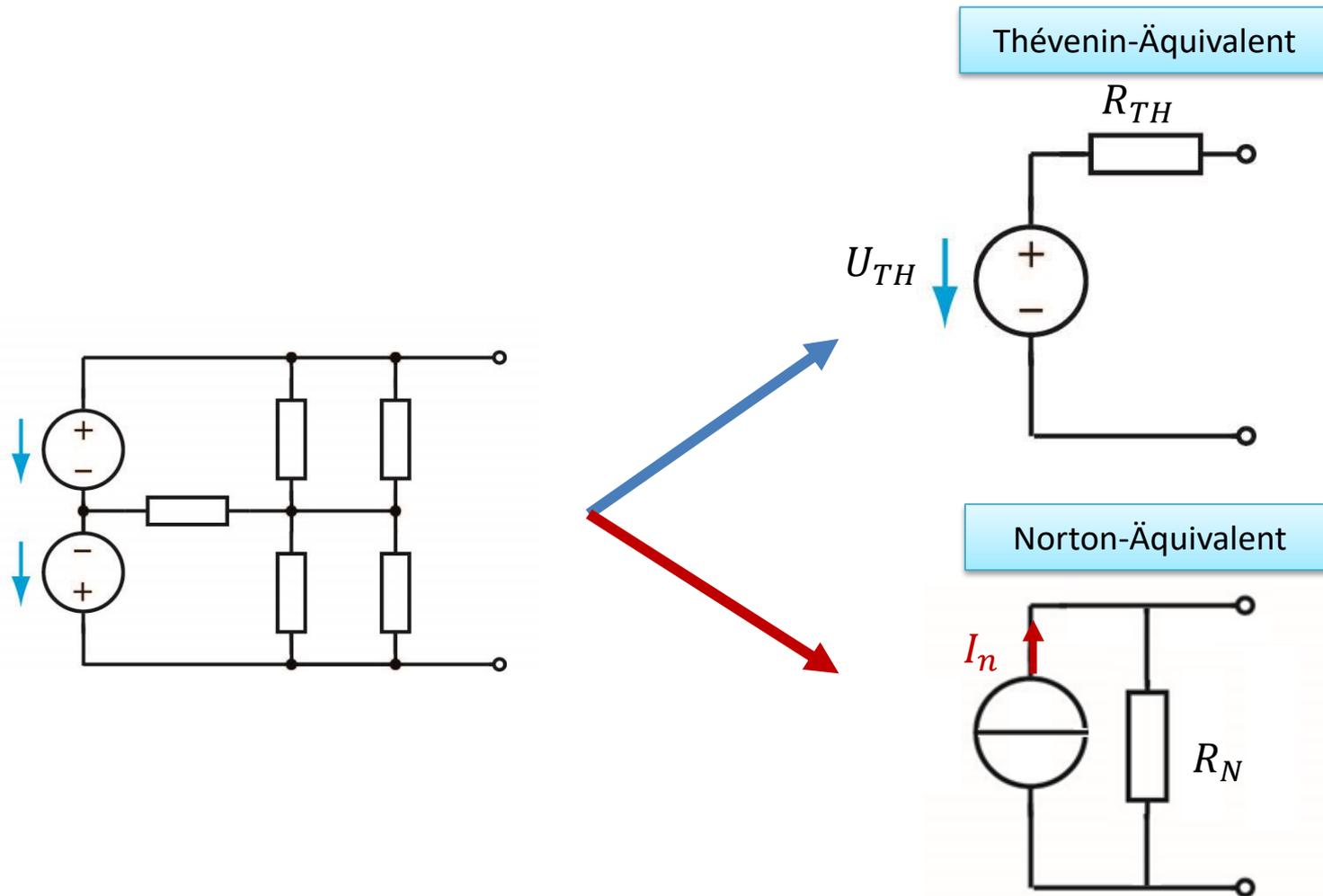
Recap: Superposition

- **Alle Quellen ausser einer werden auf «0» gesetzt.**
 - Spannungsquellen werden **kurzgeschlossen**
 - Stromquellen werden als **Leerlauf** modelliert

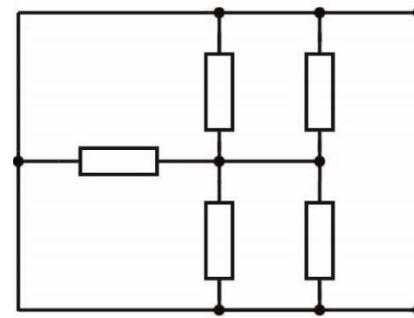
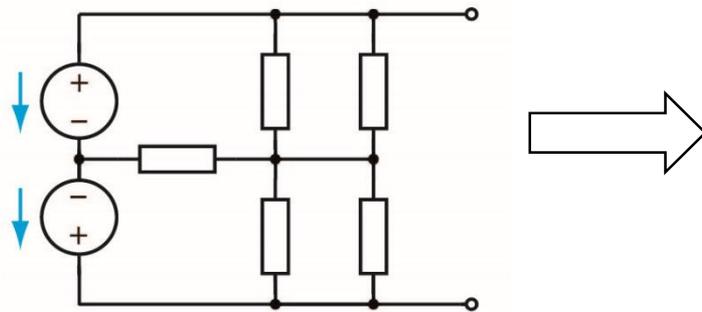


$$U_x = U_x^{(1)} + U_x^{(2)} = 5V - 12.5V = -7.5V$$

Recap: Thévenin / Norton

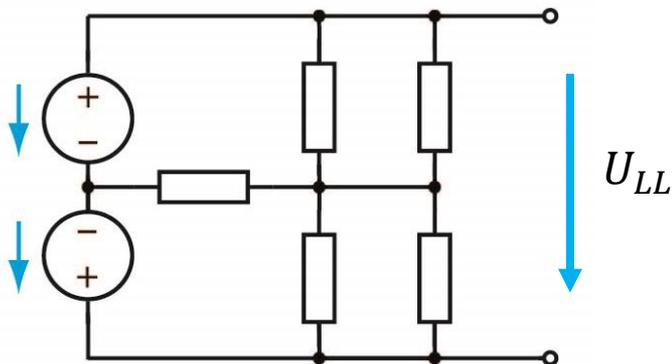


Innenwiderstand

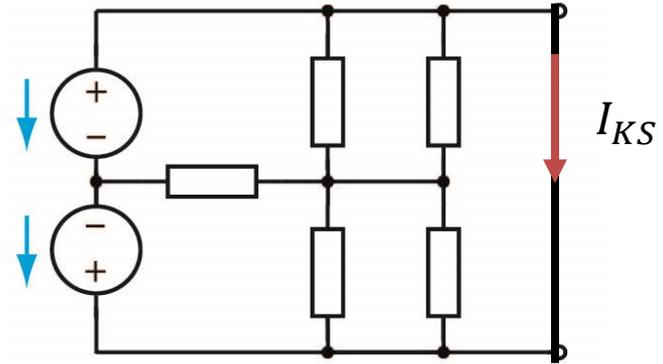


$$R_{TH} = R_N$$

Leerlaufspannung (Thévenin)



Kurzschlussstrom (Norton)



1. Grundlegende Bauteile und Rechenregeln

- Widerstände, Strom- und Spannungsquellen
- Parallel- und Serienschaltungen, Maschen- und Knotenregeln



2. Weitere passive Bauteile

- Kondensatoren und Netzwerke davon
- Induktivitäten und Netzwerke davon

Computer-Verfahren

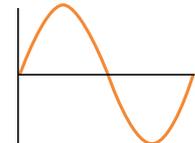


3. Transiente Vorgänge

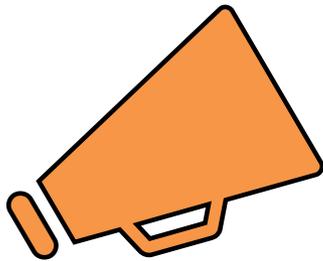
- Laden und Entladen von Kapazitäten, Auf- und Entmagnetisieren von Induktivitäten

4. Schwingende Schaltungen und Wechselstrom

- Resonanzfrequenzen, Impedanzen, Scheinleistung, ...



DEWESoft



Bearbeitet die **Multiple-Choice Aufgaben** auf Moodle!!!
➔ Grosser Teil der Prüfung besteht aus Teils nahezu identischen Fragen!!!

Wichtige Formeln

Auswendig!

Zusammenfassung Elektrotechnik I (D-MAVT)

$$U = R \cdot I$$

Ohmsches Gesetz $R = \frac{U}{I} \Leftrightarrow U = RI \Leftrightarrow I = \frac{U}{R}$

Elektrischer Leitwert $G = \frac{1}{R} \text{ [S]}$

Widerstand eines Leiters $R = \rho \frac{l}{A} \text{ [}\Omega\text{]}$

Strömrichtigkeit $J = \frac{I}{A} \text{ [A/m}^2\text{]}$

Spezifischer Widerstand nach Temperatur $\rho = \rho(T_0) [1 + \alpha(T - T_0)] \text{ [}\Omega\text{m]}$

Leitfähigkeit $\kappa = \frac{1}{\rho} \text{ [S/m]}$

Knotengleichung, Maschengleichung, Parallelschaltung, Serienschaltung

Knotengleichung $\sum_{k=1}^n I_k = 0$

Maschengleichung $\sum_{k=1}^n U_k = 0$

Serienschaltung $R_{\text{gesamt}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

Parallelschaltung $\frac{1}{R_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

Ohm'sches Gesetz $U_1 = U_2 = U_3 = \dots = U_n$

Stromverteilung $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Stromverteilung $I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$$P = U \cdot I$$

Spannungsteiler, Stromteiler

Spannungsteiler $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$

Spannungsteiler mit zwei Widerständen $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$

Stromteiler $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Stromteiler mit zwei Widerständen $I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Leistung

Energie $E = P t \text{ [J]}$

Leistung aus Widerstand $P = UI = \frac{U^2}{R} = RI^2 \text{ [W]}$

Leistungsvermögen (Abgleichsleistung mit bester Effizienz) $R_L = R_i$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zürich

Zusammenfassung Elektrotechnik I (D-MAVT)

Reale Spannungsquelle, Reale Stromquelle

Reale Spannungsquelle (reine EMK einer Elementzelle eines Zweipols) $U_{0,0} = R_i I_0$

Leertlaufspannung ($I_0 = 0$) $U_{0,0} = R_i I_0$

Kurzschlussstrom ($R_L = 0$) $I_{k,0} = I_0$

Innenwiderstand R_i

Klemmenspannung $U = R_L I$

Beide sind bezüglich Spannungen und Strömen äquivalent mit gleichem R_i und $U_0 = R_i I_0$. Sie unterscheiden sich durch die Verluste bei der Leistung.

Ersatzquelle eines Zweipols (Norton, Thévenin)

Jeder Zweipol kann durch eine reale Stromquelle (Norton) oder eine Spannungsquelle (Thévenin) ersetzt werden. Ströme dafür 2 der 3 Größen:

- Der durch die Pole fließende Strom bei einem Kurzschluss I_k
- Die an dem Polen im Leerlauf anliegende Spannung U_0
- Der zwischen den Polen anliegende Widerstand R_i . Dieser erstere alle Quellen:

Spannungsquelle \rightarrow Leerlauf

Stromquelle \rightarrow Kurzschluss

Die dritte Größe ergibt sich durch $U_0 = R_i I_k$.

Stern-Dreieck Umwandlung

$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zürich

Zusammenfassung Elektrotechnik I (D-MAVT)

$$R_L = R_i$$

$$\rightarrow P_L \text{ maximal}$$

Netzwerk mit nur dieser Quelle berechnen

Spannungen und Ströme ergeben sich als Summe aller berechneten Teilströme. Leistungen nicht summiert werden!

Maschenstromverfahren

- Mache alle Stromquellen unvirtuell.
- Finde alle Elementarmaschen E und weise ihnen einen Maschenstrom I_i zu.
- Plage die Stromquellen wieder ein. Dessen Strom ist ein bekanntes Maßnahme, der sich über eine beliebige Masche schliessen kann.
- Stelle für jede ursprüngliche Elementarmasche E die Maschengleichung auf.
- Ersetze mit $U = RI$ ($I = I_i + I_j + \dots$) die Spannungen durch die Maschenströme.
- Löse das Gleichungssystem.

Knotenpotentialverfahren

- Mache alle Spannungsquellen unvirtuell.
- Weise einem Knoten das Potential ϕ_k zu.
- Weise einem anderen Knoten ein ϕ_l zu.
- Plage die Spannungsquellen U und Kurzschlüsse wie vorher ein Knoten. Durch das Einplagen werden diese an der Pfadströme und $\phi_k + U$ an ϕ_l .
- Stelle für jeden Knoten die Knotengleichungen auf, wobei für die beiden Knoten an den Enden einer Spannungsquelle die Knotengleichung für die gemeinsamen Halbknoten aufgestellt wird.
- Ersetze mit $I = (\phi_k - \phi_l)/R$ die Ströme durch die Knotenpotentiale.
- Löse das Gleichungssystem. Es gilt: $U_{k,l} = \phi_k - \phi_l$.

$$0 = \sum I_i$$

Knoten

Elektrische Felder

Stromverteilung $P = \sum_{k=1}^n I_k^2 R_k \text{ [W]}$

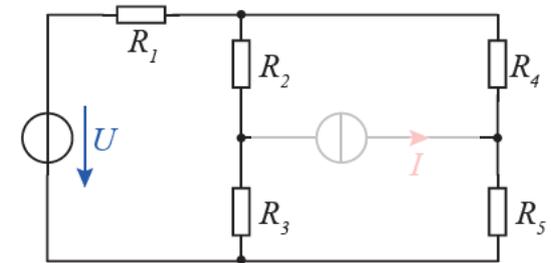
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zürich

Maschenstromverfahren

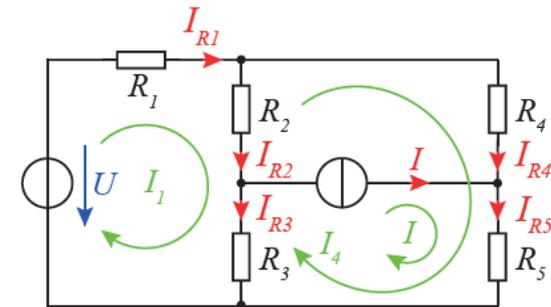
- **Elementarmasche:** Eine Masche im Netzwerk, in deren Inneren sich keine Zweige befinden

Vorgehen:

1. Mache alle Stromquellen unwirksam (Leerlauf!)
2. Bestimme nun die reduzierte Menge E^* aller verbleibenden Elementarmaschen
3. Weise jeder Masche $M_i \in E^*$ einen Maschenstrom I_i zu
4. Füge die Stromquellen wieder ein und ergänze Maschenströme für die Stromquellen (1 pro Quelle!)
5. Stelle für jede Masche $M_i \in E^*$ von Punkt 2 eine Maschengleichung (**Spannungen!**) auf
6. Löse das resultierende Gleichungssystem



a)



b)

Maschenstromverfahren Beispiel

Siehe Vorlesung Slide 99

Aufgestellte Maschengleichungen (mit den Strömen, welche wir vorhin definiert haben)

$$R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_4) + R_3 (I_1 - I_4 - I) - U = 0$$

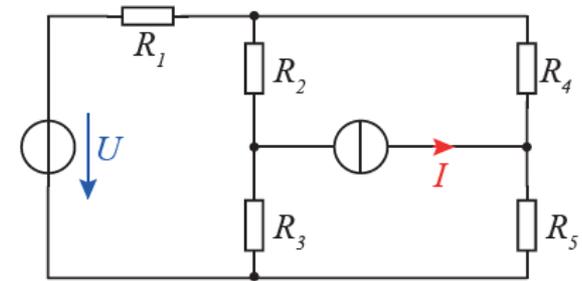
$$R_4 I_4 + R_5 (I_4 + I) + R_3 (I_4 + I - I_1) + R_2 (I_4 - I_1) = 0$$

In Matrixform:

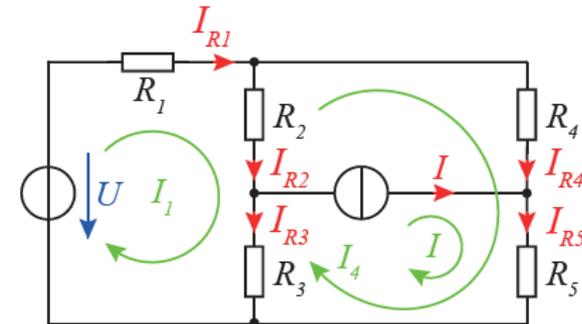
$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 - R_3 \\ -R_2 - R_3 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + R_3 I \\ -(R_3 + R_5) I \end{bmatrix}$$

Für die Zweigströme gelten die Beziehungen:

$$I_{R1} = I_1, \quad I_{R2} = I_1 - I_4, \quad I_{R4} = I_4, \quad I_{R5} = I_4 + I$$



a)



b)

Lösen linearer Gleichungssysteme

- Sowohl das Maschenstrom- wie auch das Knotenpotentialverfahren führen immer auf ein lineares Gleichungssystem!

Lösungsmethoden:

- Von Hand: Direkt Lösen, Gauss-Algorithmus, LR-Zerlegung, ...
- Mit dem Computer, zB. Matlab
- Mit dem Taschenrechner

Prüfung: Lösen des LGS überspringen und am Schluss, wenn noch Zeit, zu lösen versuchen!

Beispiel-System

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

- Mit Matlab:

$$R = [R1, R2; R3, R4];$$

$$U = [U1; U2];$$

$$I = R \setminus U$$

- Mit TI-nspire CX CAS (Taschenrechner):

$$\text{simult}\left(\begin{bmatrix} R1 & R2 \\ R3 & R4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} U1 \\ U2 \end{bmatrix}\right)$$

Elektrostatistisches Potential

- Ein elektrisches Feld, welches durch getrennte Ladungen erzeugt wird, ist wirbelfrei und es muss somit ein elektrisches Potential φ existieren (vgl. Vektoranalysis)
- Das elektrische Feld ist dann der Gradient vom Potential, also

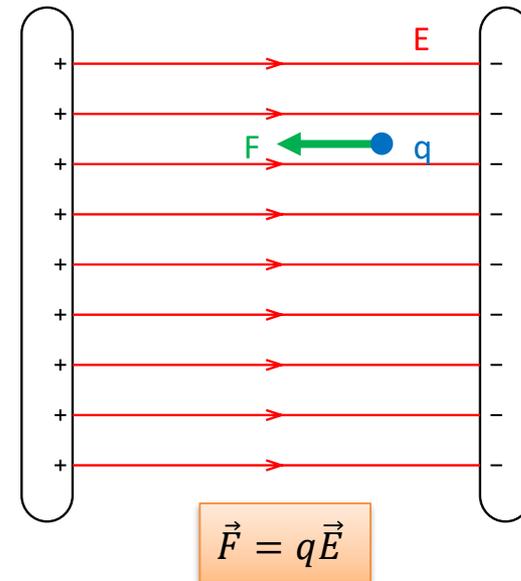
$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{E} d\vec{s} \quad \vec{x}_0: \text{Ort des Nullpotentials}$$

- Die Spannung zwischen zwei Punkten ist definiert als

$$U_{12} = \varphi(\vec{x}_2) - \varphi(\vec{x}_1)$$

Das Potential ist im Gegensatz zur Spannung an einem Punkt definiert.

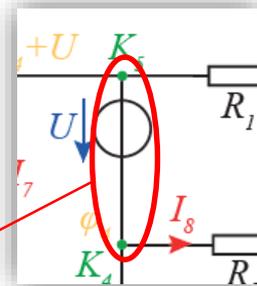


Knotenpotentialverfahren

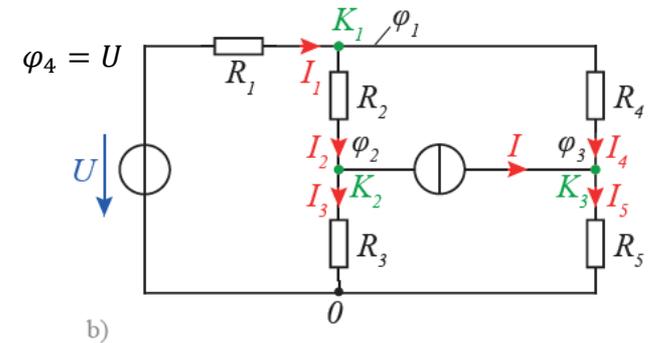
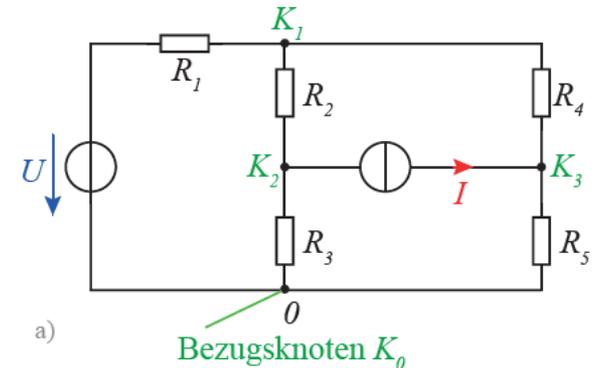
Vorgehen:

1. Wähle einen Bezugsknoten K_0 (Potential = 0)
2. Mache alle Spannungsquellen aus (Kurzschluss!)
3. Weise allen Knoten (ausser K_0) ein Potential φ_i zu
4. Füge die Spannungsquellen wieder ein: Dabei werden Knoten aufgetrennt in zwei Knoten, einer bekommt Potential φ_i , der andere $\varphi_i + U_i$
5. Stelle für alle Knoten mit unabhängigem Potential eine Knotengleichung auf!
6. Liegt zwischen zwei Knoten nur eine Spannungsquelle, werden diese als einen einzelnen Knoten betrachtet!

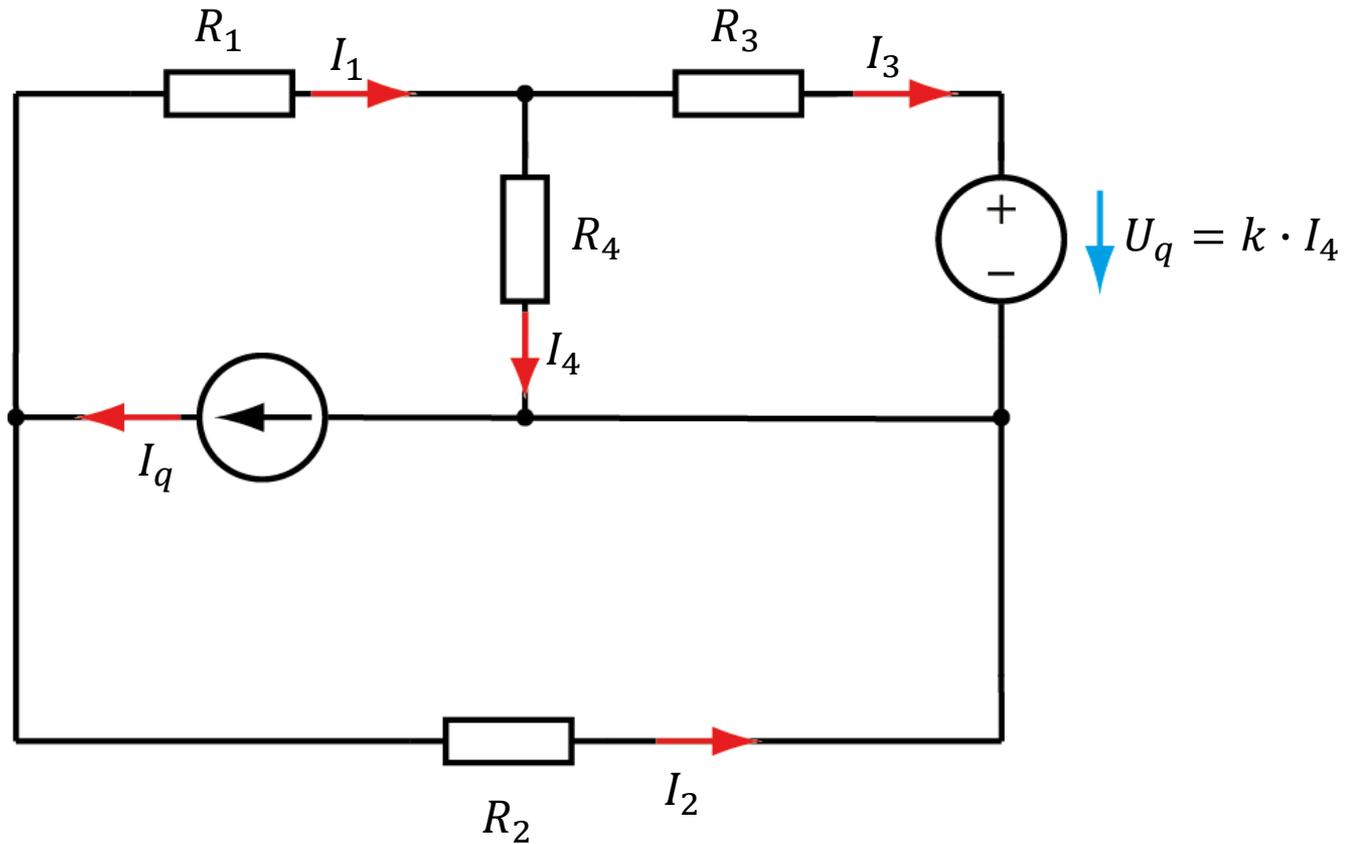
betrachte als einen Knoten!



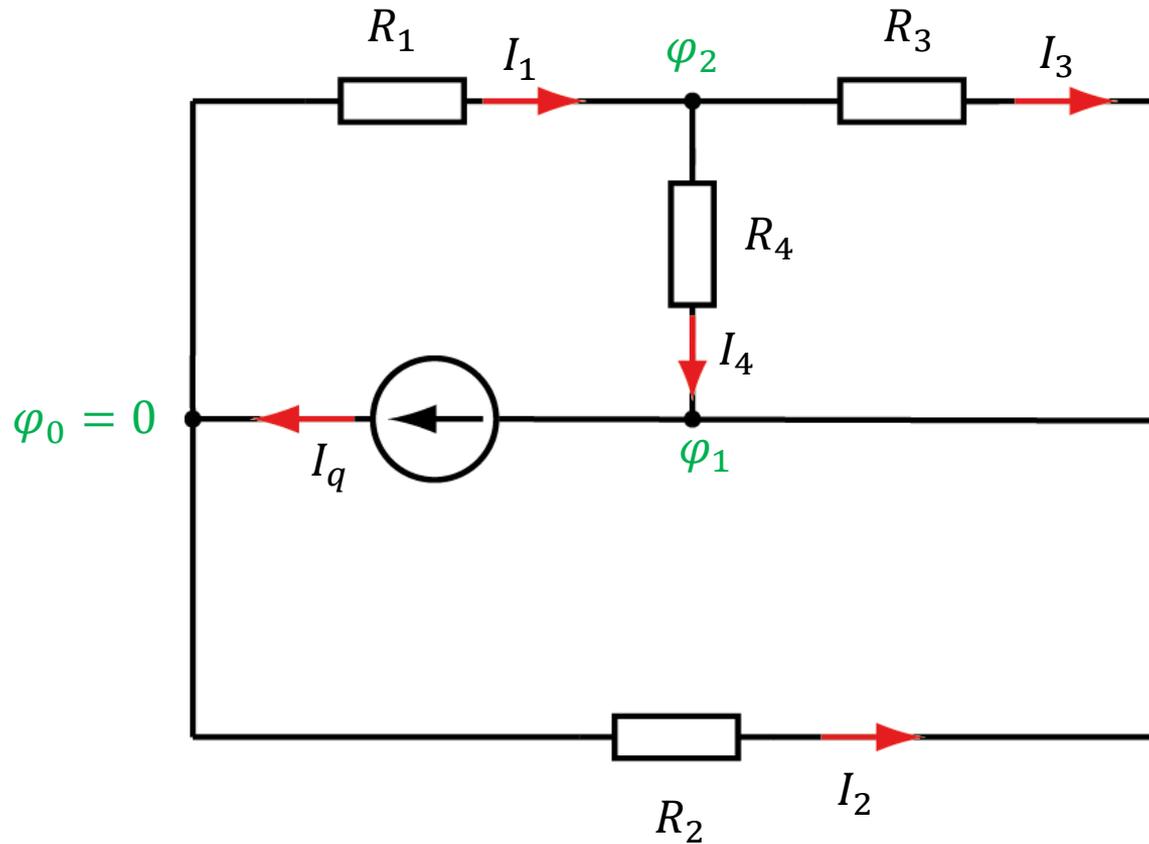
* funktioniert nur für ebene Netzwerke



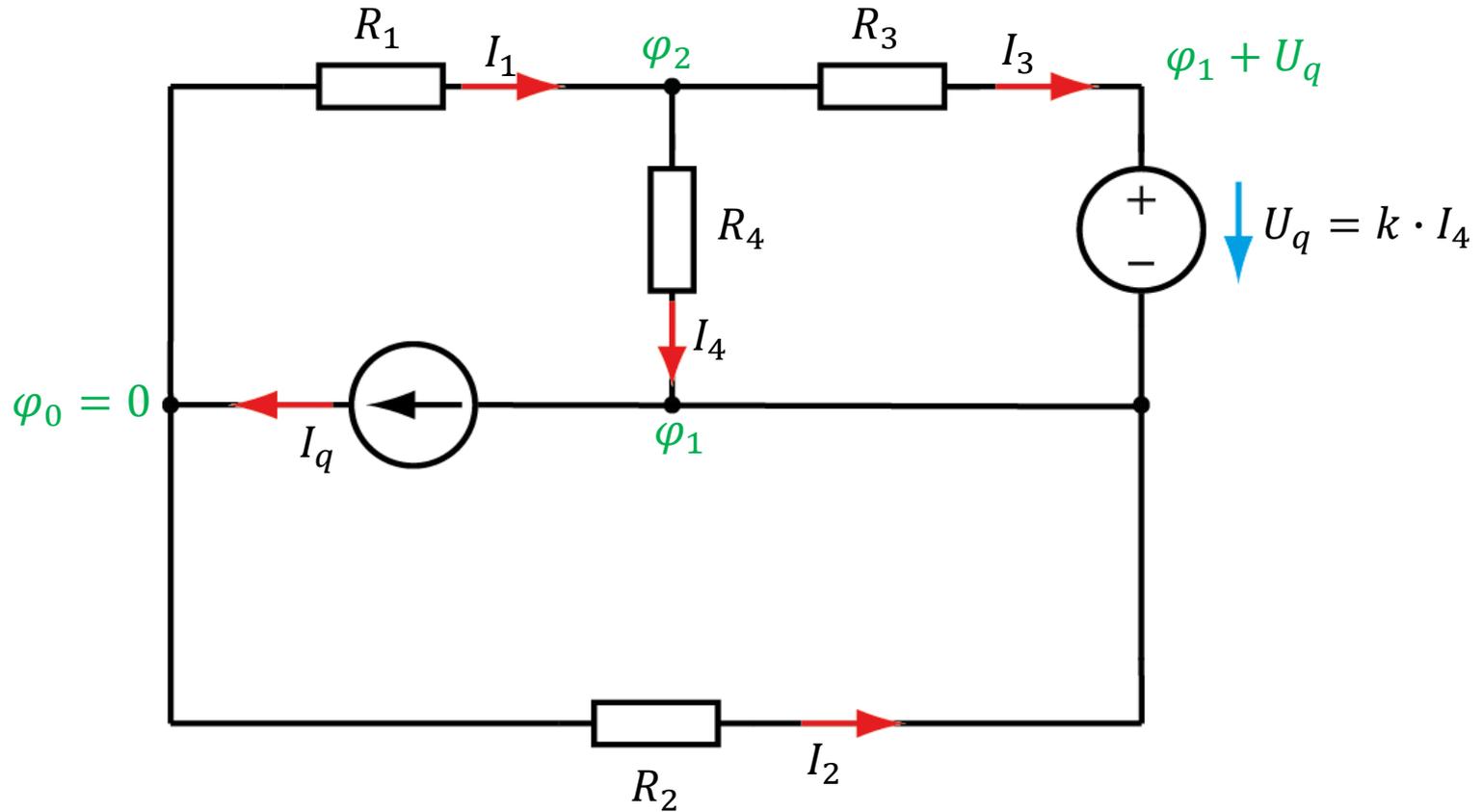
Beispiel: Knotenpotentialverfahren



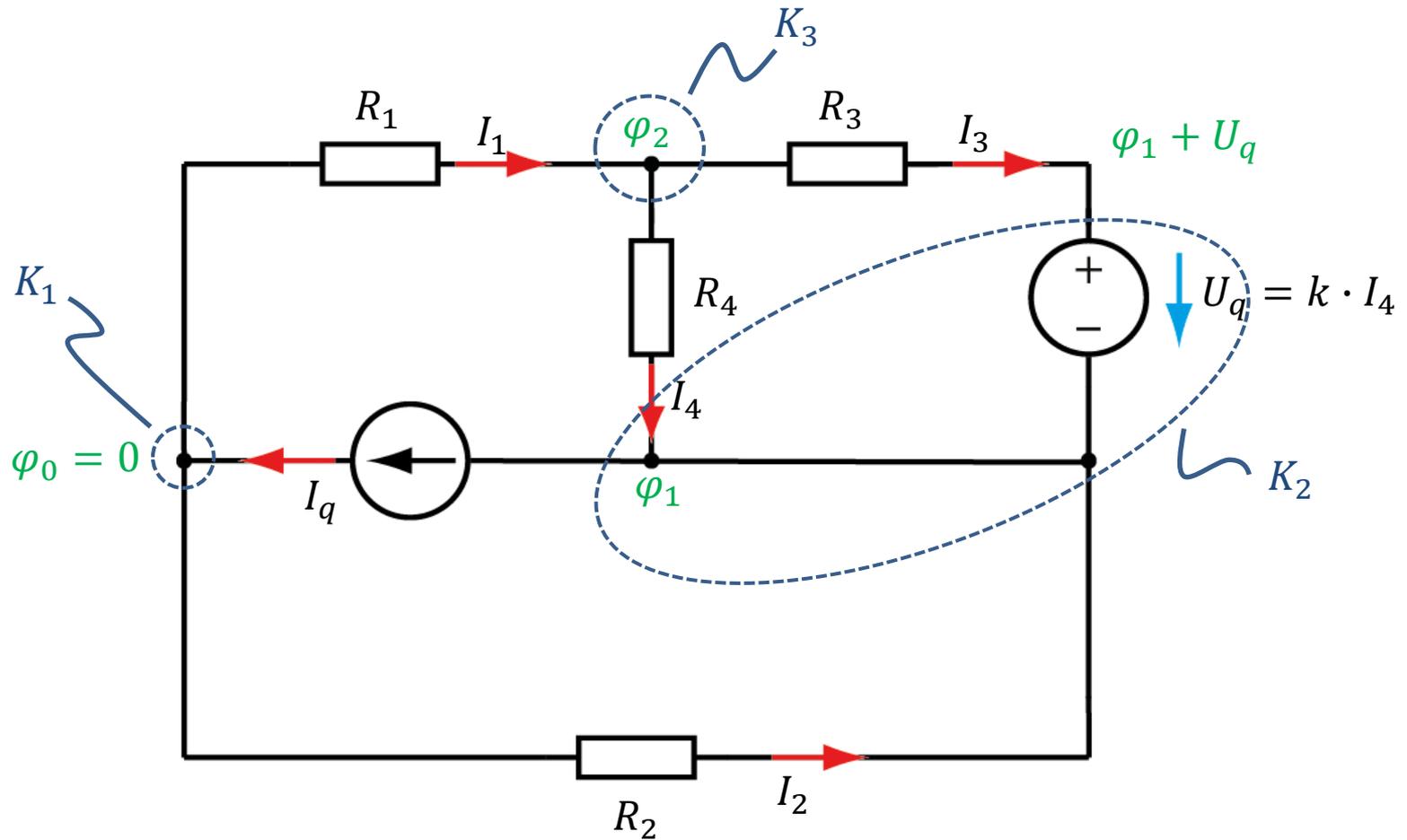
Potentiale definieren, Spannungsquellen entfernen



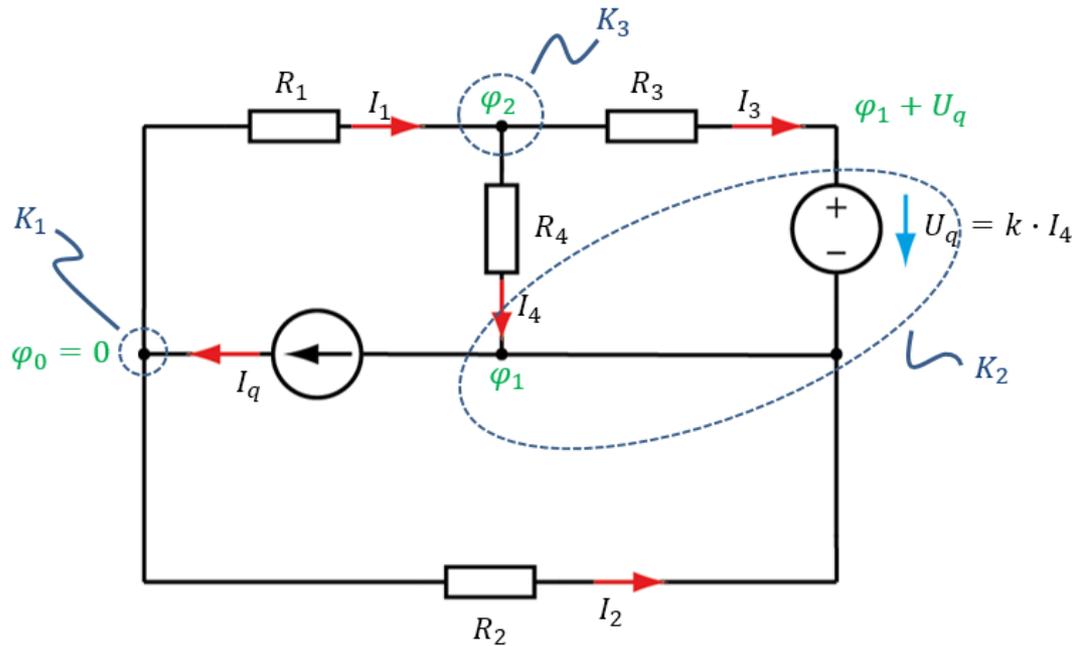
Spannungsquelle einfügen, Potential hinzufügen



Knoten identifizieren



Knotengleichungen aufstellen



$$K_1: I_q - I_1 - I_2 = 0$$

$$K_2: -I_q + I_2 + I_4 + I_3 = 0$$

$$K_3: I_1 - I_4 - I_3 = 0$$

$$K_1: I_q - \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_2} = 0$$

$$U_q = k \cdot I_4 = k \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4}$$

$$K_2: -I_q + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - U_q}{R_3} = 0$$

$$K_3: \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} - I_3 = 0$$

Setze $\varphi_0 = 0$

$$K_1: I_q + \frac{\varphi_2}{R_1} + \frac{\varphi_1}{R_2} = 0$$

$$K_2: -I_q - \frac{\varphi_1}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - k \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4}}{R_3} = 0$$

$$K_3: -\frac{\varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} - I_3 = 0$$

→ Schreibe die Gleichungen in Vektor-Matrix-Form und löse nach $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

→ Drücke die gesuchten Größen mit Hilfe der Potentiale aus:

$$\text{Bsp.: } U_{R_4} = U_{\varphi_2 \rightarrow \varphi_1} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Knotenpotentialverfahren Beispiel

Knotengleichungen der unabhängigen Knoten:

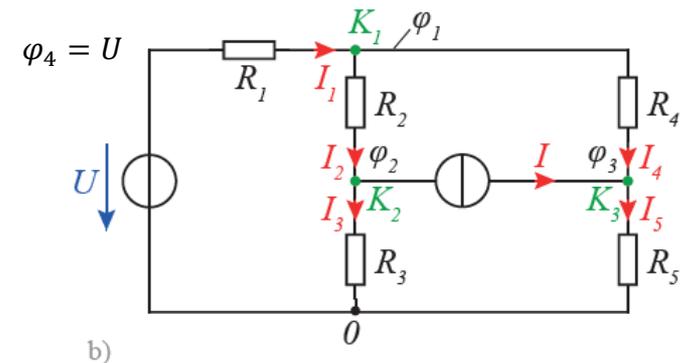
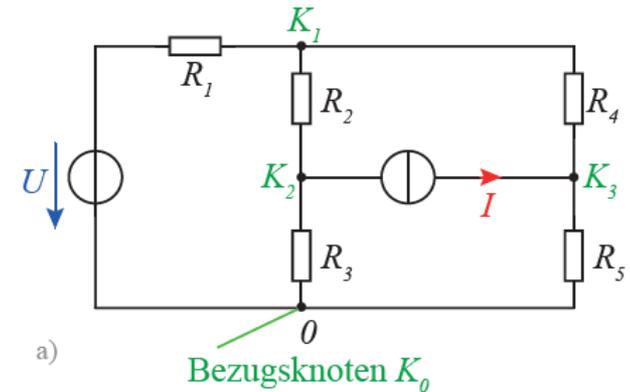
$$K_1 \rightarrow I_2 - I_1 + I_4 = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} - \frac{U - \varphi_1}{R_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} = 0$$

$$K_2 \rightarrow I_3 - I_2 + I = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \frac{\varphi_2}{R_3} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} + I = 0$$

$$K_3 \rightarrow I_5 - I_4 - I = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \frac{\varphi_3}{R_5} - \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} - I = 0$$

Resultierende Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_4} & 0 & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U/R_1 \\ -I \\ I \end{bmatrix}$$



Welches Verfahren wann anwenden?

z : Anzahl der Zweige im Netzwerk

k : Anzahl Knoten nach Entfernen der Quellen

Anzahl Gleichungen

Maschenstromverfahren:

$$N_M = z - k + 1$$

Knotenpotentialverfahren:

$$N_K = k - 1$$

Beim Knotenpotentialverfahren benötigt man folglich bei **stark vermaschten Netzen**, d.h. Netze die zwischen den verschiedenen Knoten viele **Zweige/Verbindungen** haben, weniger unabhängige Gleichungen als beim Maschenstromverfahren.

Das **Knotenpotentialverfahren** hat weiterhin Vorteile bei Netzen mit **vielen Spannungsquellen**, das **Maschenstromverfahren** hingegen bei Netzen mit **vielen Stromquellen**.