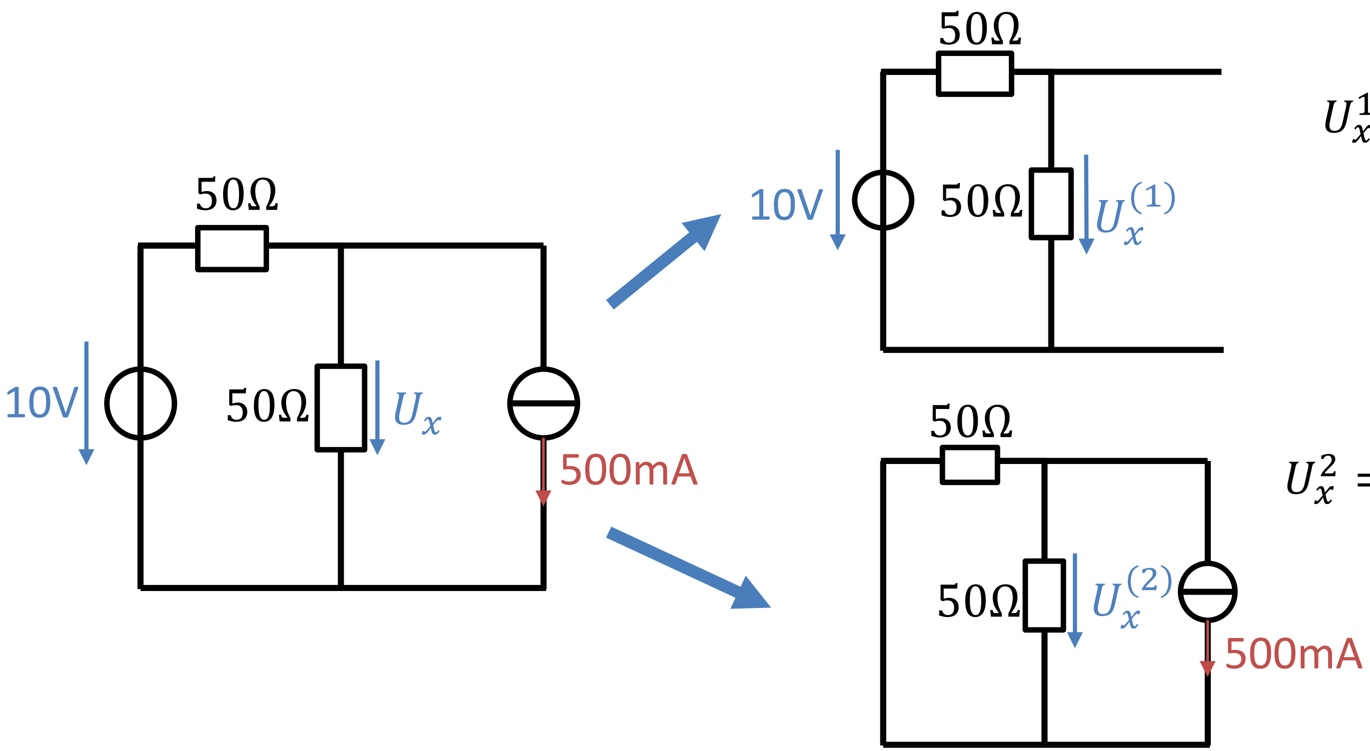
ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Elektrotechnik I

Übung 5
Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren

- **Alle Quellen ausser einer werden auf «0» gesetzt.**
  - Spannungsquellen werden **kurzgeschlossen**
  - Stromquellen werden als **Leerlauf** modelliert

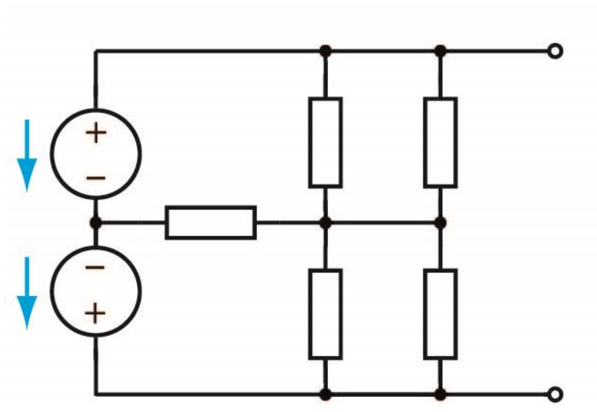


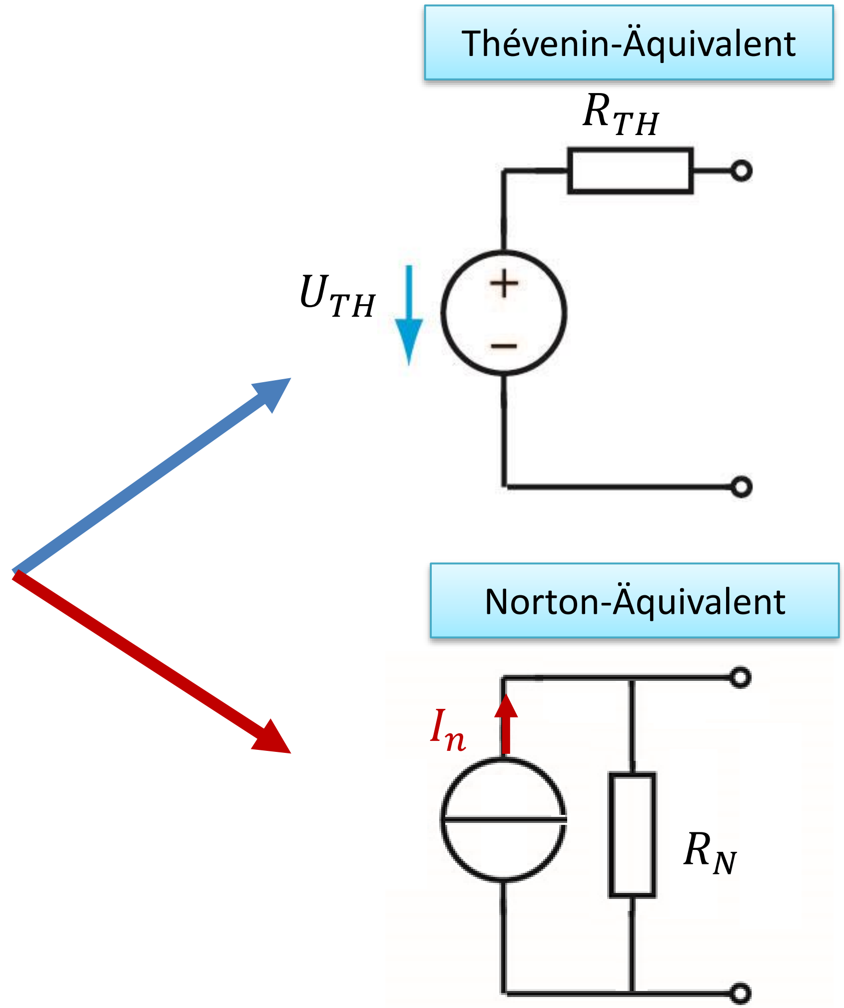
$U_x^1 = 5V$

$U_x^2 = 250mA \cdot 50\ \Omega = -12.5V$

$$\boxed{U_x = U_x^{(1)} + U_x^{(2)} = 5V\ - 12.5V = -7.5V}$$

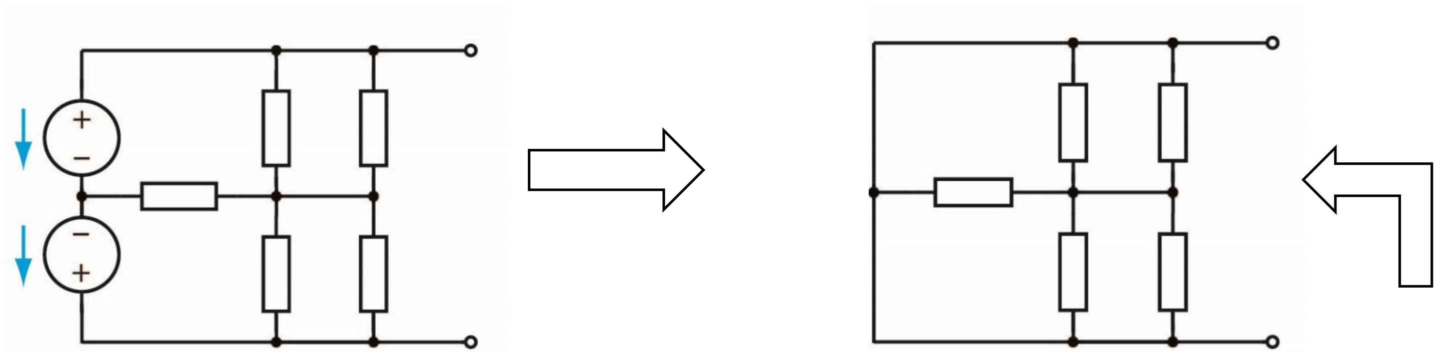
Recap: Thévenin / Norton





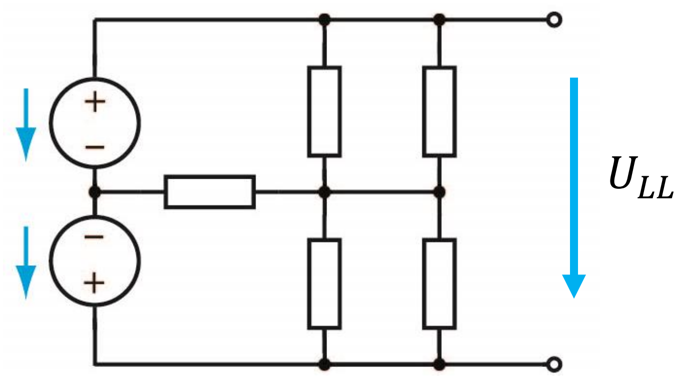
Recap: Messwerte für Schaltbild berechnen

Innenwiderstand

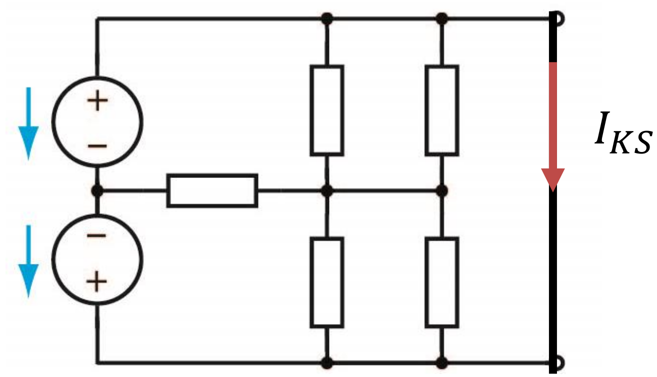


$$R_{TH} = R_N$$

Leerlaufspannung (Thévenin)



Kurzschlussstrom (Norton)

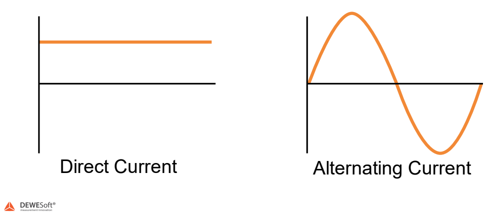


1. Grundlegende Bauteile und Rechenregeln
   - Widerstände, Strom- und Spannungsquellen
   - Parallel- und Serienschaltungen, Maschen- und Knotenregeln

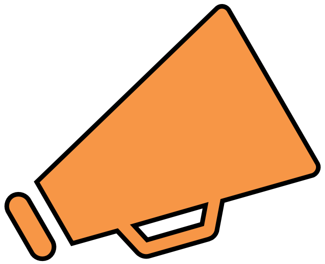
Computer-Verfahren

2. Weitere passive Bauteile
   - Kondensatoren und Netzwerke davon
   - Induktivitäten und Netzwerke davon

3. Transiente Vorgänge
   - Laden und Entladen von Kapazitäten, Auf- und Entmagnetisieren von Induktivitäten
4. Schwingende Schaltungen und Wechselstrom
   - Resonanzfrequenzen, Impedanzen, Scheinleistung, …



Reminder

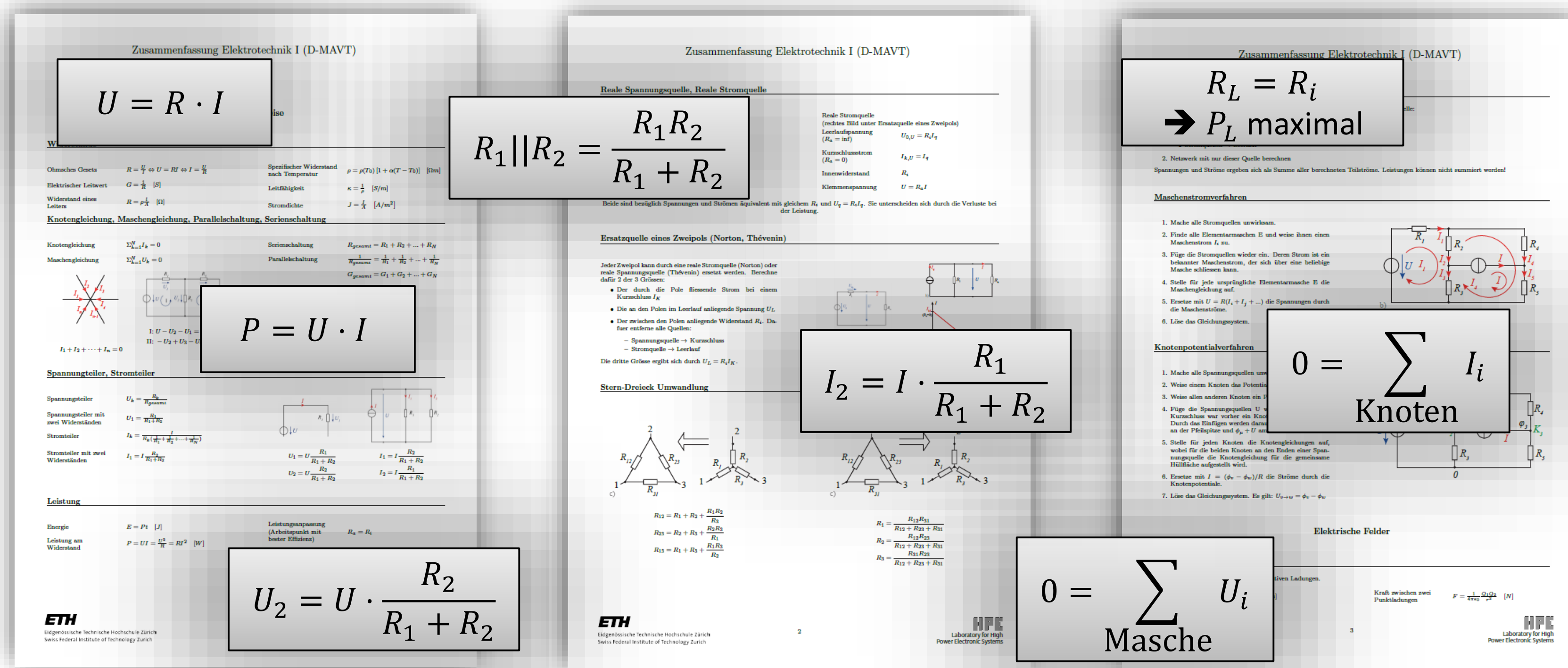


Bearbeitet die Multiple-Choice Aufgaben auf Moodle!!!

➔ Grosser Teil der Prüfung besteht aus Teils nahezu identischen Fragen!!!

Wichtige Formeln

Auswendig!



Zusammenfassung Elektrotechnik I (D-MAVT)

Knotengleichung, Maschengleichung, Parallelschaltung, Serienschaltung

Spannungsteiler, Stromteiler

Leistung

Reale Spannungsquelle, Reale Stromquelle

Ersatzquelle eines Zweipols (Norton, Thévenin)

Stern-Dreieck Umwandlung

Maschenstromverfahren

Knotenpotentialverfahren

Elektrische Felder

$$U = R \cdot I$$

$$R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_L = R_i$$

$\rightarrow$ P_L maximal

$$P = U \cdot I$$

$$I_2 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$0 = \sum_{\text{Knoten}} I_i$$

$$U_2 = U \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

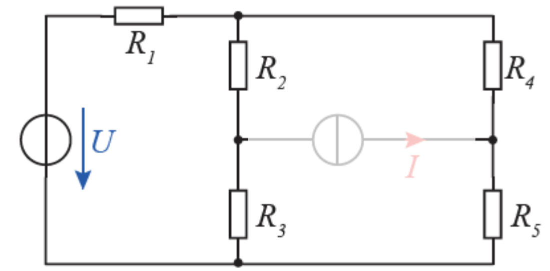
$$0 = \sum_{\text{Masche}} U_i$$

Maschenstromverfahren

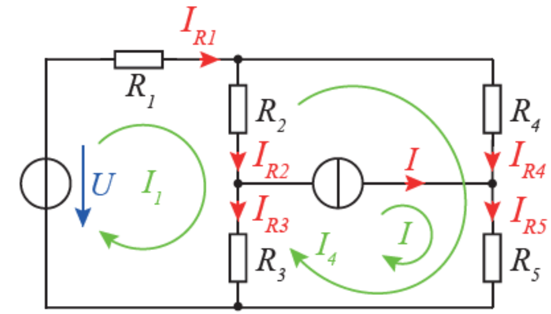
- **Elementarmasche:** Eine Masche im Netzwerk, in deren Inneren sich keine Zweige befinden

Vorgehen:

1. Mache alle Stromquellen unwirksam (Leerlauf!)
2. Bestimme nun die reduzierte Menge E^* aller verbleibenden Elementarmaschen
3. Weise jeder Masche $M_i \in E^*$ einen Maschenstrom I_i zu
4. Füge die Stromquellen wieder ein und ergänze Maschenströme für die Stromquellen (1 pro Quelle!)
5. Stelle für jede Masche $M_i \in E^*$ von Punkt 2 eine Maschengleichung (**Spannungen**!) auf
6. Löse das resultierende Gleichungssystem



a)



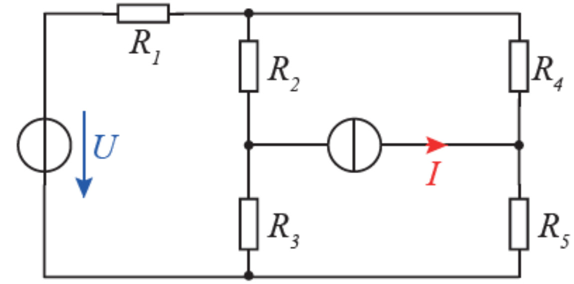
b)

Maschenstromverfahren Beispiel

Siehe Vorlesung Slide 99

Aufgestellte Maschengleichungen (mit den Strömen, welche wir vorhin definiert haben)

$$R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_4) + R_3(I_1 - I_4 - I) - U = 0$$
$$R_4 I_4 + R_5(I_4 + I) + R_3(I_4 + I - I_1) + R_2(I_4 - I_1) = 0$$



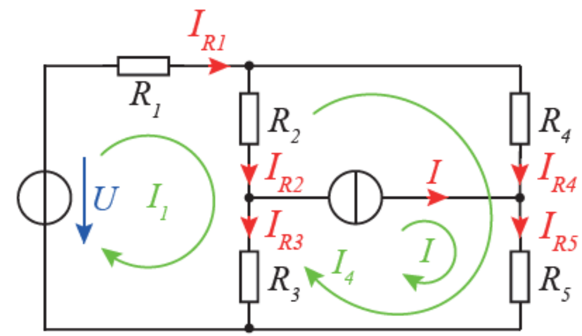
a)

In Matrixform:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_2 - R_3 \\ -R_2 - R_3 & R_2 + R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U + R_3 I \\ -(R_3 + R_5) I \end{bmatrix}$$

Für die Zweigströme gelten die Beziehungen:

$$I_{R1} = I_1,\ I_{R2} = I_1 - I_4,\ I_{R4} = I_4,\ I_{R5} = I_4 + I$$



b)

- **Sowohl das Maschenstrom- wie auch das Knotenpotentialverfahren führen immer auf ein lineares Gleichungssystem!**

Lösungsmethoden:

- **Von Hand: Direkt Lösen, Gauss-Algorithmus, LR-Zerlegung, …**
- **Mit dem Computer, zB. Matlab**
- **Mit dem Taschenrechner**

Prüfung: Lösen des LGS überspringen und am Schluss, wenn noch Zeit, zu lösen versuchen!

Beispiel-System

$$\begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

- **Mit Matlab:**

```
R = [R1, R2; R3, R4];
U = [U1; U2];
I = R \ U
```

- **Mit TI-nspire CX CAS (Taschenrechner):**

$$\texttt{simult}\left(\begin{bmatrix} \texttt{R1} & \texttt{R2} \\ \texttt{R3} & \texttt{R4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \texttt{U1} \\ \texttt{U2} \end{bmatrix}\right)$$

Elektrostatisches Potential

- **Ein elektrisches Feld, welches durch getrennte Ladungen erzeugt wird, ist wirbelfrei und es muss somit ein elektrisches Potential φ existieren (vgl. Vektoranalysis)**
- **Das elektrische Feld ist dann der Gradient vom Potential, also**

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$

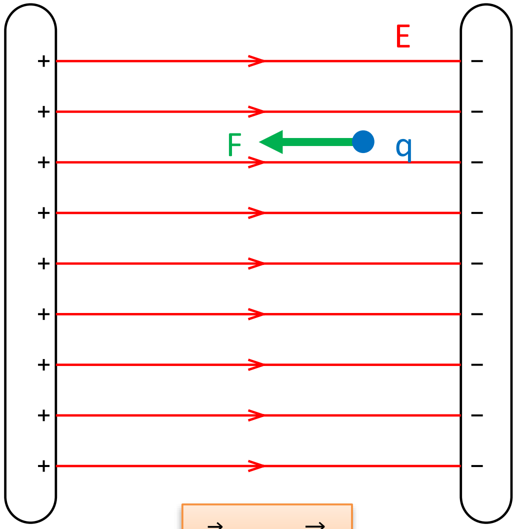
$$\Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = -\int_{\vec{x_0}}^{\vec{x}} \vec{E}\, d\vec{s}$$

$\vec{x_0}$: Ort des Nullpotentials

- Die Spannung zwischen zwei Punkten ist definiert als

$$U_{12} = \varphi(\vec{x_2}) - \varphi(\vec{x_1})$$

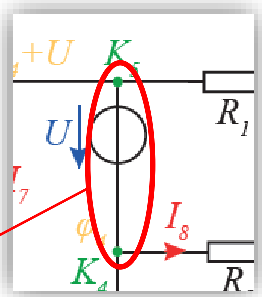
Das Potential ist im Gegensatz zur Spannung an *einem* Punkt definiert.



$$\vec{F} = q\vec{E}$$

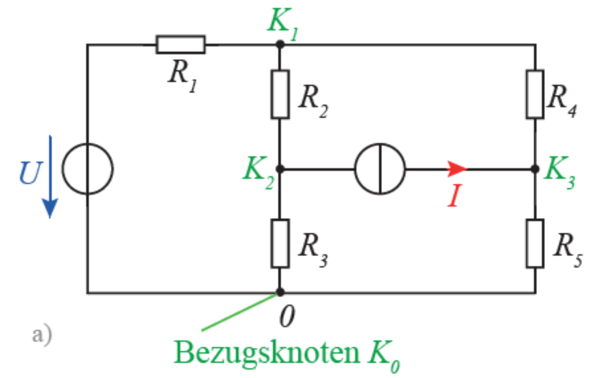
Vorgehen:

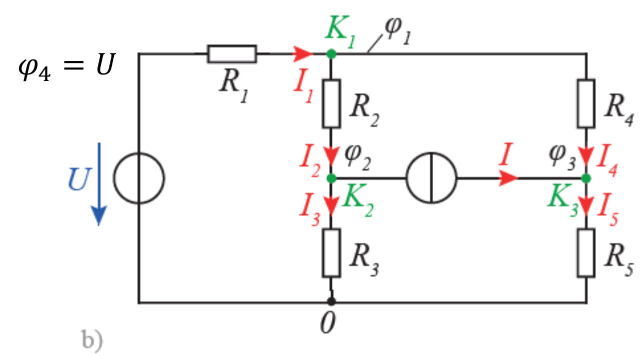
1. **Wähle einen Bezugsknoten K_0 (Potential = 0)**
2. **Mache alle Spannungsquellen aus (Kurzschluss!)**
3. **Weise allen Knoten (ausser K_0) ein Potential φ_i zu**
4. **Füge die Spannungsquellen wieder ein: Dabei werden Knoten aufgetrennt in zwei Knoten, einer bekommt Potential φ_i, der andere $\varphi_i + U_i$**
5. **Stelle für alle Knoten mit unabhängigem Potential eine Knotengleichung auf!**
6. **Liegt zwischen zwei Knoten nur eine Spannungsquelle, werden diese als einen einzelnen Knoten betrachtet!**



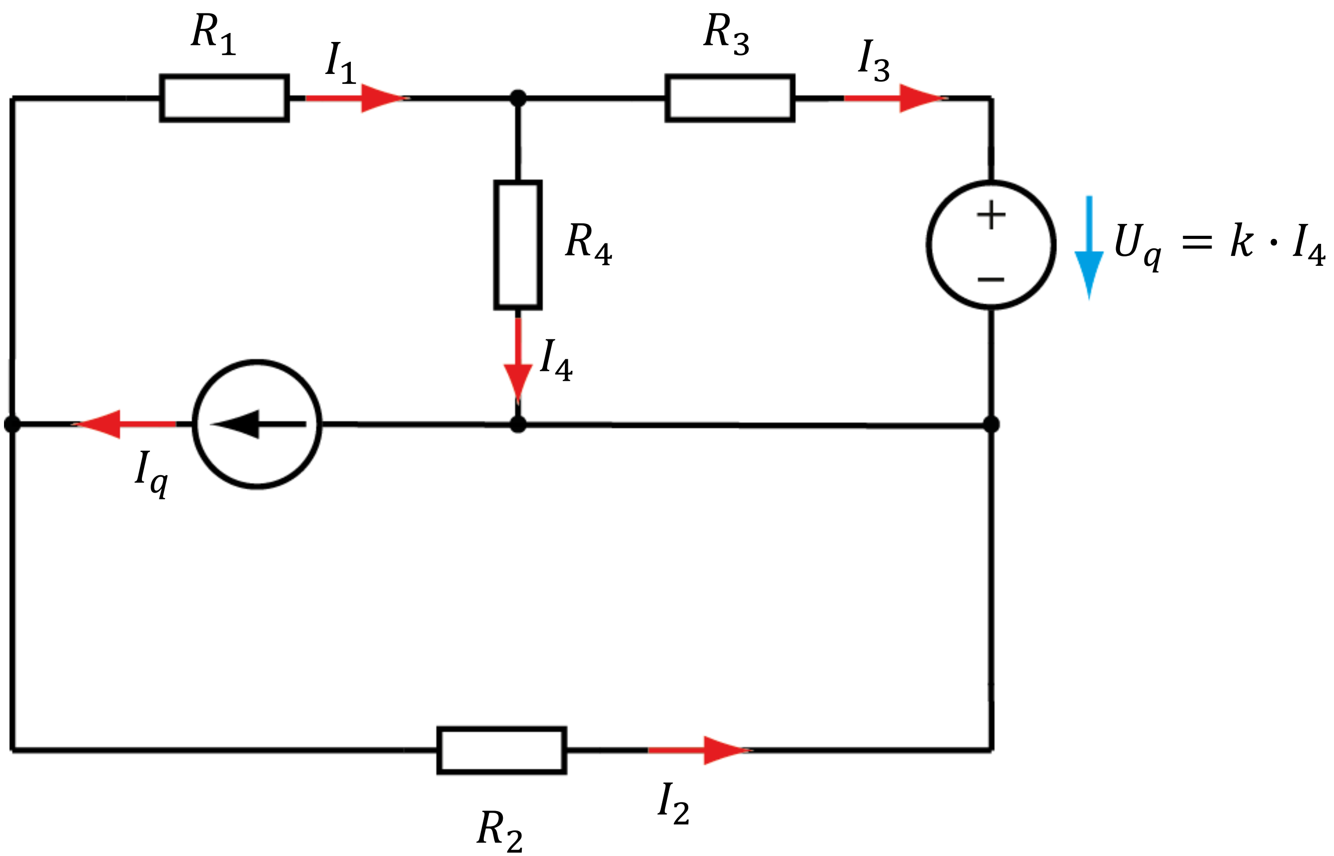
betrachte als einen Knoten!

* funktioniert nur für ebene Netzwerke

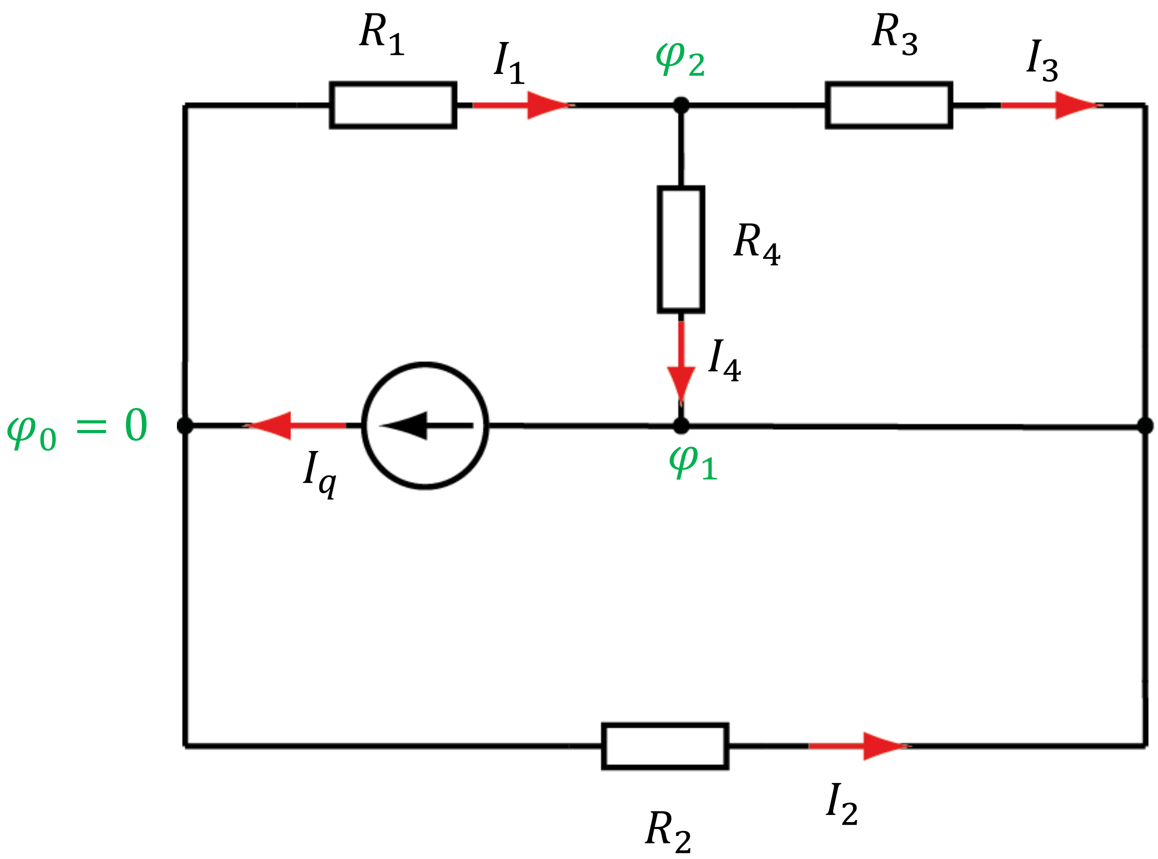




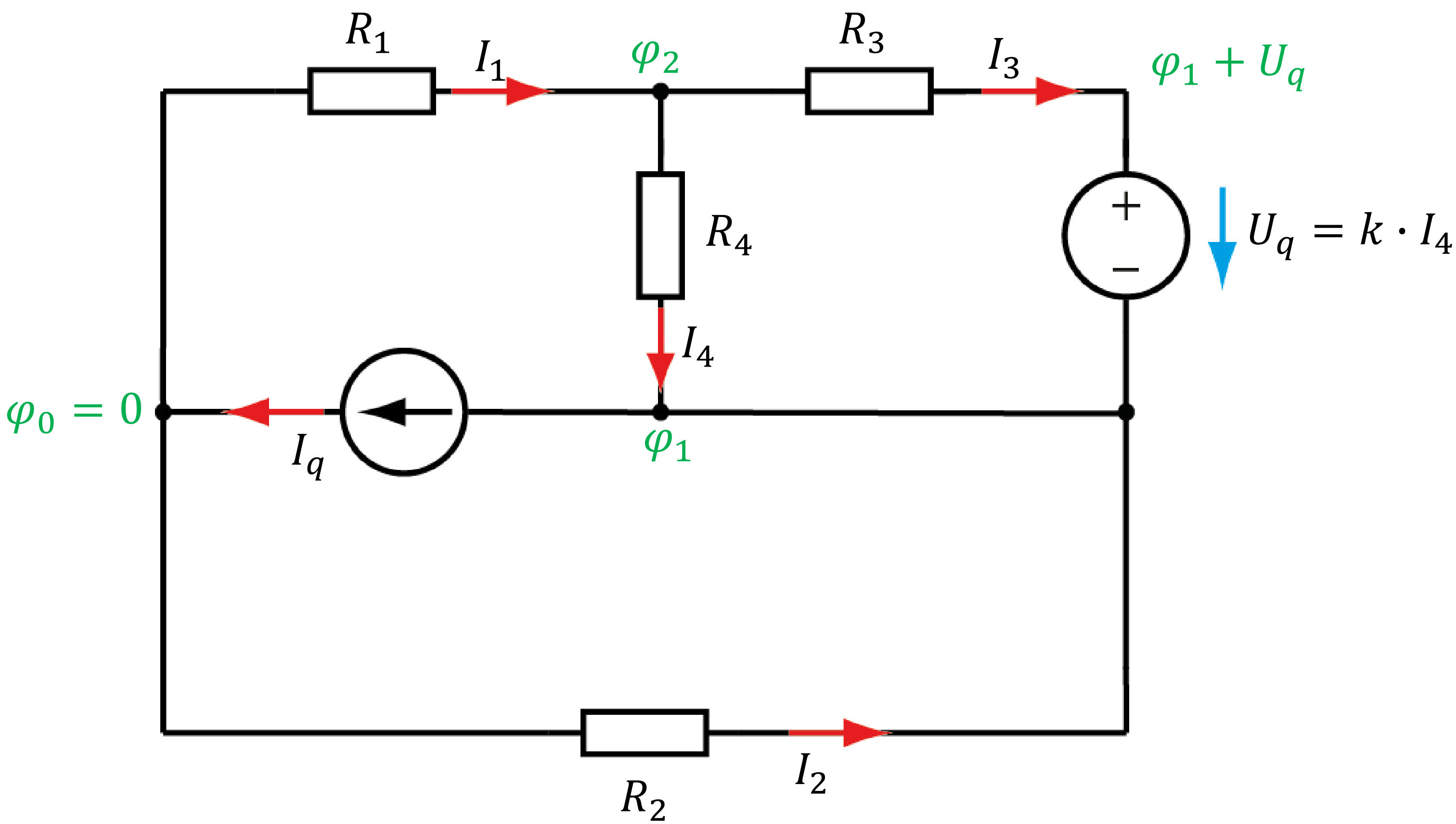
Beispiel: Knotenpotentialverfahren



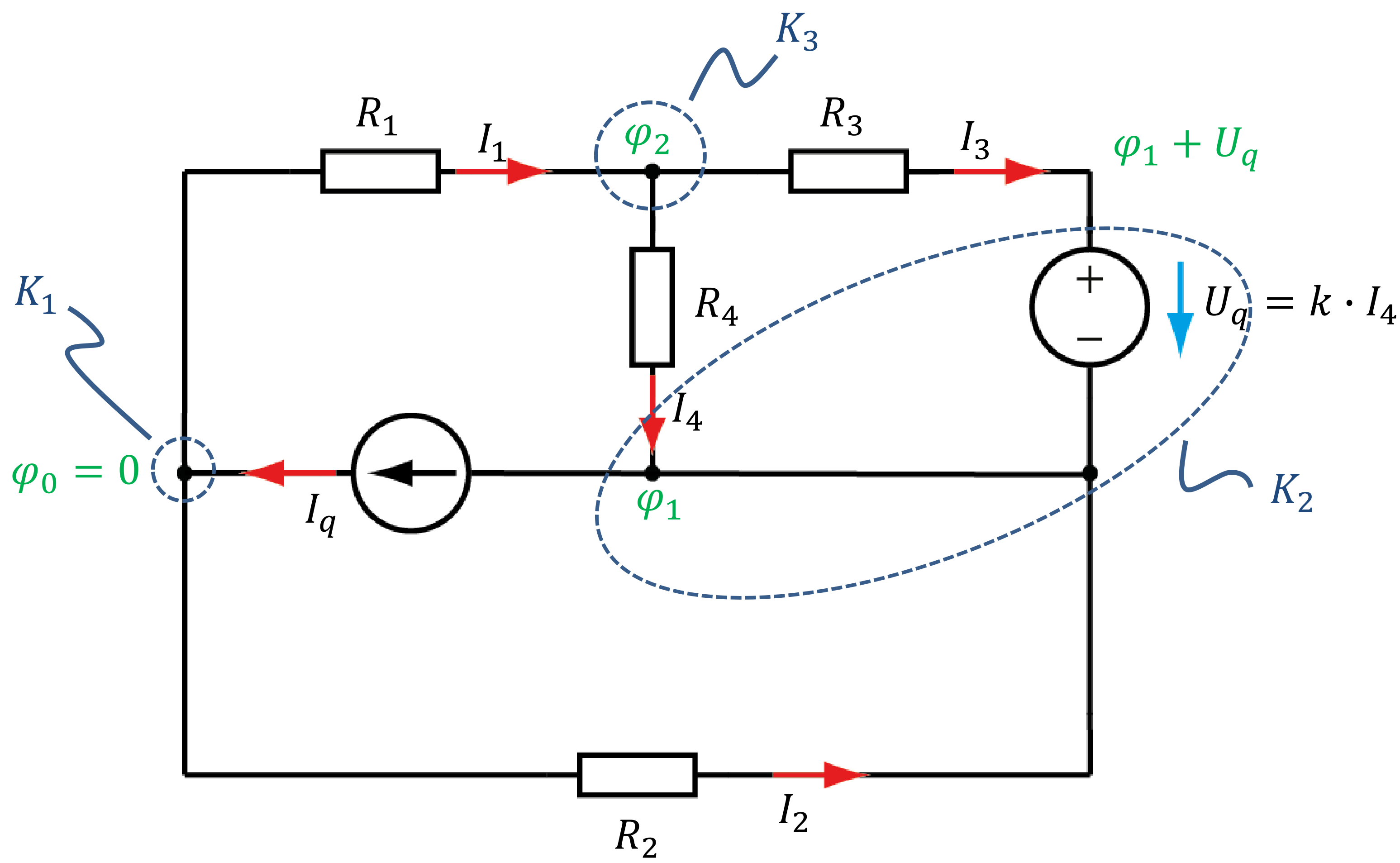
Potentiale definieren, Spannungsquellen entfernen

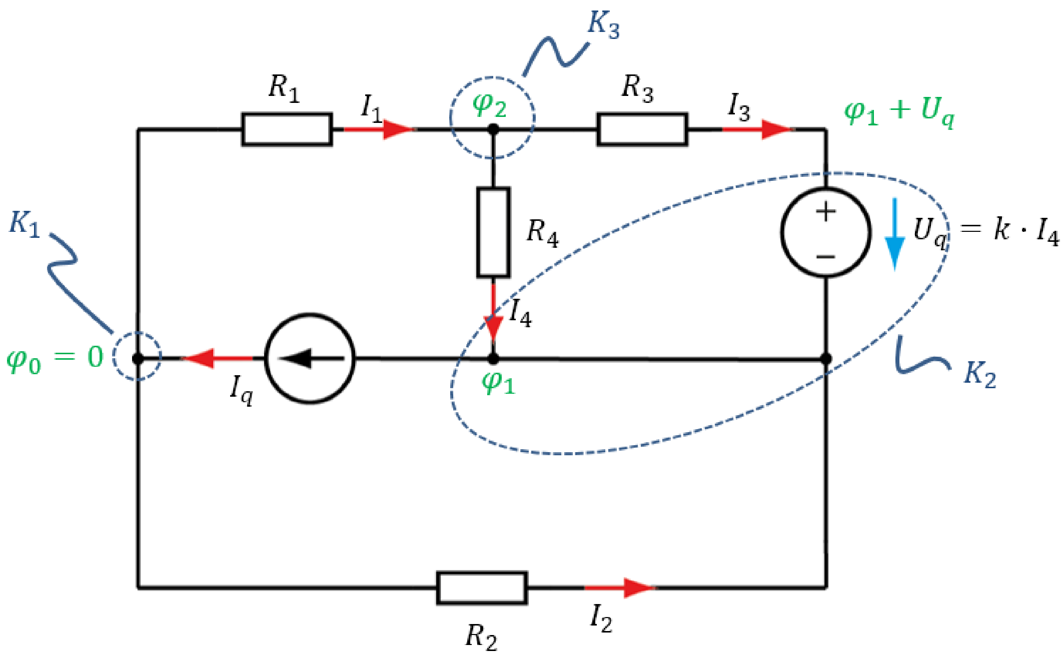


Spannungsquelle einfügen, Potential hinzufügen



Knoten identifizieren





$$K_1\colon\ I_q - I_1 - I_2 = 0$$

$$K_2\colon -I_q + I_2 + I_4 + I_3 = 0$$

$$K_3\colon I_1 - I_4 - I_3 = 0$$

$$K_1\colon\ I_q - \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_2} = 0$$

$$U_q = k \cdot I_4 = k \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4}$$

$$K_2\colon -I_q + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - U_q}{R_3} = 0$$

$$K_3\colon \frac{\varphi_0 - \varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} - I_3 = 0$$

Setze $\varphi_0 = 0$

$$K_1:\ I_q + \frac{\varphi_2}{R_1} + \frac{\varphi_1}{R_2} = 0$$

$$K_2: -I_q - \frac{\varphi_1}{R_2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1 - k \cdot \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4}}{R_3} = 0$$

$$K_3: -\frac{\varphi_2}{R_1} - \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_4} - I_3 = 0$$

→ Schreibe die Gleichungen in Vektor-Matrix-Form und löse nach $\varphi_{1,}\ \varphi_2, \varphi_3$

→ Drücke die gesuchten Größen mit Hilfe der Potentiale aus:

$$Bsp.:\ U_{R_4} = U_{\varphi_2 \rightarrow \varphi_1} = \ \varphi_2 - \varphi_1$$

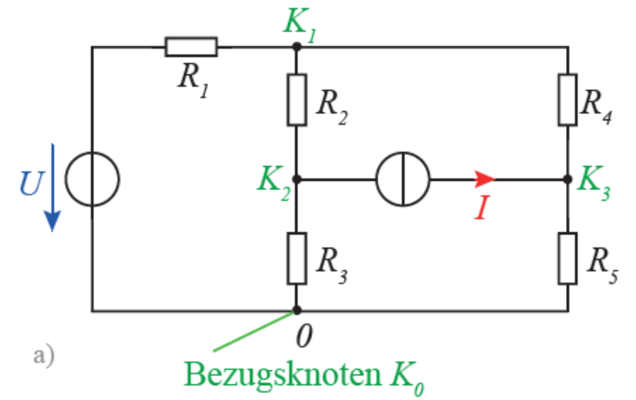
Knotenpotentialverfahren Beispiel

Knotengleichungen der unabhängigen Knoten:

$$K_1 \rightarrow I_2 - I_1 + I_4 = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \quad \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} - \frac{U - \varphi_1}{R_1} + \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} = 0$$

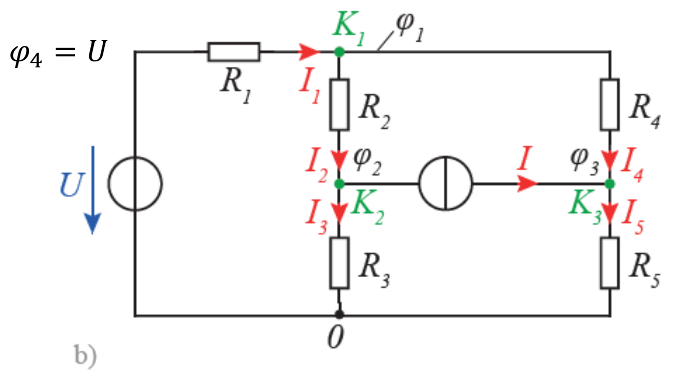
$$K_2 \rightarrow I_3 - I_2 + I = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \quad \frac{\varphi_2}{R_3} - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_2} + I = 0$$

$$K_3 \rightarrow I_5 - I_4 - I = 0 \quad \xrightarrow[\text{Gesetz}]{\text{Ohmsches}} \quad \frac{\varphi_3}{R_5} - \frac{\varphi_1 - \varphi_3}{R_4} - I = 0$$



Resultierende Matrixform:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} & 0 \\ -\frac{1}{R_4} & 0 & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U/R_1 \\ -I \\ I \end{bmatrix}$$



ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Laboratory for High
Power Electronic Systems

Welches Verfahren wann anwenden?

z: **Anzahl der Zweige im Netzwerk**

k: **Anzahl Knoten nach Entfernen der Quellen**

<u>Anzahl Gleichungen</u>

Maschenstromverfahren:

$$N_M = z - k + 1$$

Knotenpotentialverfahren:

$$N_K = k - 1$$

Beim Knotenpotenzialverfahren benötigt man folglich bei *stark vermaschten Netzen*, d.h. Netze die zwischen den verschiedenen Knoten viele Zweige/Verbindungen haben, weniger unabhängige Gleichungen als beim Maschenstromverfahren.

Das Knotenpotenzialverfahren hat weiterhin Vorteile bei Netzen mit *vielen Spannungsquellen*, das Maschenstromverfahren hingegen bei Netzen mit *vielen Stromquellen*.