Name, Vorname	Testat	

Lösung Aufgabe 1: Entwurf eines Hochspannungskondensator

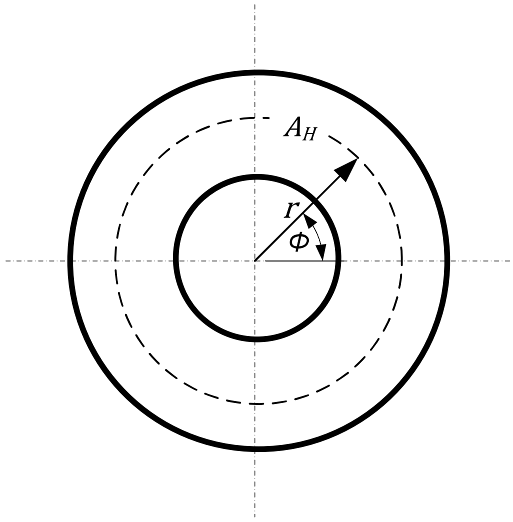

Fig. 5: Geometrie des Hochspannungszylinderkondensator

Zuerst wird die Kapazität eines Zylinderkondensators hergeleitet. Dazu berechnen wir das elektrische Feld $\vec{E}$ zwischen den beiden Elektroden. Die elektrische Feldstärke ist unabhängig vom Winkel ϕ (vgl. **Fig. 5**) und von der Axialkomponente des Zylinders. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Feldlinien senkrecht auf die ideal leitenden Elektroden stehen müssen, und damit nur Radialkomponenten des Feldes vorhanden sind (natürlich unter Vernachlässigung der Randstörungen). In Zylinderkoordinaten ausgedrückt gilt

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

Um die elektrische Feldstärke *E(r)* zu bestimmen, muss über die elektrische Flussdichte gerechnet werden:

$$\vec{D}(r) = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}(r)$$

Der elektrische Fluss über eine geschlossene Hüllfläche ist gleich der eingeschlossenen elektrischen Ladung. Berechnen wir den Elektrischen Fluss über eine eingeführte Hüllfläche A_H (vgl. **Fig. 5**), so gilt

$$\Psi = A_H D(r) = 2r\pi l D(r) = 2r\pi l \varepsilon_r \varepsilon_0 E(r) = -Q$$

Weil auf der inneren Elektrode die negative Kondensatorladung *Q* liegt (der Spannungspfeil *U* ist von aussen nach innen gerichtet), muss das negative Vorzeichen vor Q stehen. Damit folgt für das elektrische Feld

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e}_r = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r l}\vec{e}_r$$

Die Kapazität *C* ist damit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\int\limits_{r=\frac{D}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r l}\,\mathrm{d}r} = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)}$$

Das elektrische Feld wird maximal auf dem Innenzylinder ($r = \frac{d}{2}$). Der maximal auftretende elektrische Feldstärken-Betrag ist damit

$$E_{\max} = \left|\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l \frac{d}{2}}\right| = \frac{Q}{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l d}$$

Mit der Definition der Kapazität $C := \frac{Q}{U} \Leftrightarrow Q = CU$ folgt:

$$E_{\max} = \frac{CU_{\max}}{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l d} \Leftrightarrow \underline{\underline{d}} = \frac{CU_{\max}}{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l E_{\max}} = \frac{30\cdot 10^{-12}F \cdot 140\cdot 10^3 V}{\pi \cdot 8.854\cdot 10^{-12} F/m \cdot 0.45m \cdot 60\cdot 10^5 V/m} = \underline{\underline{55.9mm}}$$

Weiter gilt

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\ln\left(\frac{D}{d}\right)} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{C}$$

Durch beidseitiges Potenzieren mit e erhält man

$$\frac{D}{d} = \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{C}\right)$$

$$\underline{\underline{D}} = d \cdot \exp\left(\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{C}\right) = 55.9mm \cdot \exp\left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} F/m \cdot 0.45m}{30 \cdot 10^{-12} F}\right) = \underline{\underline{128.8mm}}$$

Lösung Aufgabe 2: Blitzableiter

a) Wegen der halbkugelförmigen Geometrie bietet es sich an, Kugelkoordinaten zu verwenden. An der Oberfläche *r* = *a* der perfekt leitenden Elektrode verschwindet die Tangentialkomponente der Stromdichte, die somit in dieser Trennebene nur eine Komponente in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_r}$ aufweist. Die gleiche Aussage gilt auch für die Trennebene *r* = *b*. Wegen der verschwindenden Leitfähigkeit des Luftraums muss die Stromdichte tangential zur Luft/Erdreich-Trennebene sein, d.h. auch hier tritt nur eine Komponente in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e_r}$ auf. Wegen der ortsunabhängigen Leitfähigkeit im Bereich $a \leq r \leq b$ ist die gesamte Stromverteilung innerhalb der Halbkugel ausschliesslich radial gerichtet. Resultierend gilt der Ansatz

$$\vec{J} = J_r(r)\vec{e_r}$$

Der Strom I ist gleich dem Integral über die Stromdichte

$$I = \iint_{A_H} \vec{J} d\vec{A}$$

wobei die Fläche A_H der in **Fig. 2b** eingezeichneten Hilfsfläche A_H entspricht. Die Stromdichte $\vec{J}$ auf der Fläche A_H ist über die ganze Fläche konstant und zeigt immer senkrecht auf die Fläche. Damit vereinfacht sich das Integral zu dem Produkt aus Stromdichtebetrag und dem Betrag der Fläche. Die Fläche ist gleich der Hälfte der Kugeloberfläche mit Radius r.

$$I = J_r(r)A(r) = J_r(r)\frac{4\pi r^2}{2} = J_r(r)2\pi r^2$$

Diese Gleichung lässt sich nach $J_r(r)$ auflösen:

$$J_r(r) = \frac{I}{2\pi r^2}$$

Wie bereits zu Beginn erwähnt, verschwindet die Tangentialkomponente beim Übergang zwischen Erde/Leiter bzw. Leiter/Erde. Die Normalkomponente bleibt unverändert bei den Übergangen Erde/Leiter bzw. Leiter/Erde.

Linearantrieb

Aufgabe 1

Abb. 1 zeigt die Feldlinien der magnetischen Induktion B erzeugt durch den Erregerstrom I_E. B nimmt dabei im Schenkel, auf welchem die Spule L_S befestigt wird, gegen aussen linear ab.

Die benötigte Windungszahl wird mit dem Durchflutungsgesetz

$$N \cdot I = \oint H \cdot dl = \sum_i H_i \cdot l_i = \sum_i \frac{B_i}{\mu_i} \cdot l_i$$

berechnet. Wegen $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ ist hier nur der Luftspalt mit der Länge d_1 = 5mm relevant. Es folgt:

$$N_E = \frac{B_L \cdot d_1}{\mu_0 \cdot I_E} = 318.3$$

Damit sich im Luftspalt die gewünschte Flussdichte von B_L = 0.8T einstellt, sind also N_E = 319 Windungen vorzusehen.

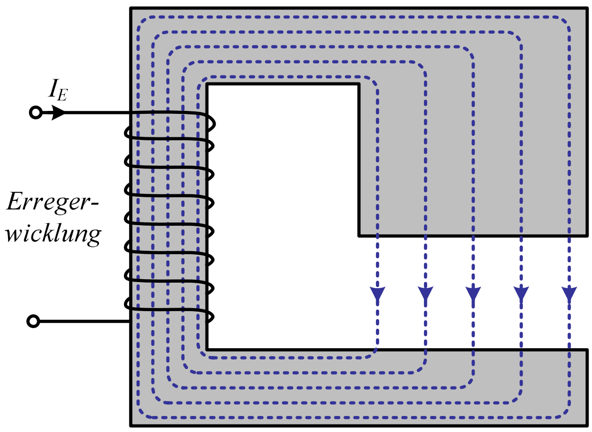

Abb. 1: Verlauf der Feldlinien im Linearantrieb.

Aufgabe 2

Der Widerstand R_E der Erregerwicklung berechnet sich einerseits zu

$$R_E = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l_{W,tot}}{A_W} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{N_E \cdot l_W}{D_W^2 / 4 \cdot \pi},$$

und anderseits zu:

$$R_E = \frac{U_E}{I_E}$$

Daraus folgt für den Drahtdurchmesser:

$$D_W = 2 \cdot \sqrt{\frac{N_E \cdot l_W \cdot I_E}{\pi \cdot \sigma \cdot U_E}} = 0.68\text{mm}$$

Aufgabe 3

Die Verlustleistung in der Erregerwicklung kann mit dem Widerstand R_E bestimmt werden:

$$P_E = R_E \cdot I_E^2 = \frac{U_E}{I_E} \cdot I_E^2 = U_E \cdot I_E = 120\text{W}$$

Da über der Erregerwicklung gerade die gegebene Spannung U_E abfällt, kann die Verlustleistung auch direkt aus dem Produkt von Erregerstrom I_E und Spannungsabfall U_E berechnet werden.

Aufgabe 4

Eine zeitliche Flussänderung induziert in einer Spule die Spannung

$$U_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Zusammen mit der Differentialgleichung einer Induktivität

$$U_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

folgt:

$$L = N \cdot \frac{d\Phi}{di_L}$$

L beschreibt also die differentielle Änderung des Spulenflusses in Abhängigkeit von einer Änderung des Erregerstroms.

Da die (geringen) Streufelder vernachlässigt werden, ist der durch die Erregerspule erzeugte magnetische Fluss Φ_E überall im Eisenkreis konstant. Er kann mit der gegebenen Flussdichte B_L im Luftspalt berechnet werden:

$$\Phi_E = B_L \cdot A = \frac{N_E \cdot I_E \cdot \mu_0}{d_1} \cdot a \cdot b$$

Damit folgt für die Induktivität des Eisenkreises:

$$L_E = N_E \cdot \frac{d\Phi_E}{dI_E} = \frac{N_E^2 \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b}{d_1} = 13.4\text{mH}$$

Aufgabe 5

Nur die im Luftspalt liegenden Abschnitte der Spule befinden sich in einem magnetischen Feld. Damit beträgt die effektive Leiterlänge nur $l_S = N_S \cdot b$.

Die durch den Spulenstrom erzeugte Kraft F_x berechnet sich somit zu:

$$F_x = \left| I_S \cdot \left(\vec{l}_S \times \vec{B}_L \right) \right| = I_S \cdot l_S \cdot B_L = I_S \cdot N_S \cdot b \cdot B_L = 9.6\text{N}$$

Aufgabe 6

Durch die Aufweitung des Luftspaltes reduziert sich die magnetische Flussdichte im Luftspalt auf

$$B_L = \frac{N_E \cdot I_E \cdot \mu_0}{d_2},$$

und damit die Kraft auf

$$F_x = I_S \cdot l_S \cdot B_L = I_S \cdot N_S \cdot b \cdot \frac{N_E \cdot I_E \cdot \mu_0}{d_2} = 8.0\text{N}.$$

Soll wieder die ursprüngliche Kraft erzeugt werden, so ist der Spulenstrom soweit zu erhöhen, bis im Luftspalt wieder dieselbe Flussdichte erreicht wird. Aus

$$B_{L1} = \frac{N_E \cdot I_{E1} \cdot \mu_0}{d_1} = \frac{N_E \cdot I_{E2} \cdot \mu_0}{d_2} = B_{L2}$$

folgt:

$$I_{E2} = \frac{d_2 \cdot I_{E1}}{d_1} = 12\text{A}$$

Aufgabe 7

Bewegt sich die Spule, so wird in ihr nach dem Induktionsgesetz die Spannung

$$U_S = N_S \cdot \frac{d\Phi_S}{dt},$$

induziert. Die zeitliche Änderung des Flusses in einer Spulenwindung kann dabei über die Änderung des vom Luftspalt her eintretenden Flusses berechnet werden (vgl. **Abb. 2**):

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = B_L \cdot \frac{dA_L}{dt} = B_L \cdot b \cdot \frac{dx}{dt} = B_L \cdot b \cdot v_x$$

Der Fluss in einer Windung der Spule ändert sich also nur, falls sich die Windung im Luftspaltfeld auf dem Schenkel bewegt.

Demnach folgt die induzierte Spannung in der gesamten Spule zu:

$$U_S = N_S \cdot B_L \cdot b \cdot v_x = 4.8\text{V}$$

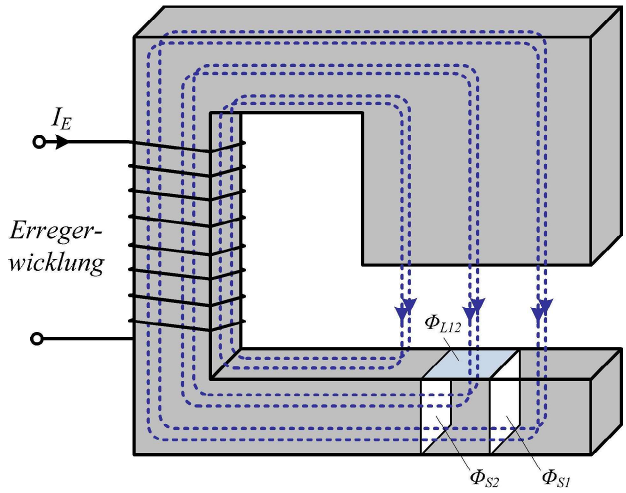

Abb. 2: Zur Berechnung der Änderung des Flusses in einer Spulenwindung ($\Phi_{S2} = \Phi_{S1} + \Phi_{L12}$).