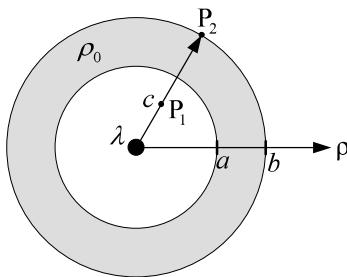


Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 30. März 2009	

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
5 Aufgaben

(100 Punkte)

Aufgabe 1:**(20 Punkte)****Abbildung 1:** Ladungsanordnung

Um den Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems (ρ, φ, z) ist eine zylinderförmig verteilte Raumladung der Dichte

$$\rho_H(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \rho_0 & \text{für } a \leq \rho \leq b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$$

angeordnet. Zusätzlich befindet sich auf der z-Achse eine Linienladung mit der zugehörigen Linienladungsdichte λ .

Die gesamte Anordnung sei in z-Richtung unendlich ausgedehnt.

Hinweis: Für die Teilaufgaben a) bis c) sind die Ergebnisse bezogen auf eine zylindrische Hüllfläche der Länge l , welche konzentrisch um den Ursprung angeordnet ist, anzugeben.

- Geben Sie die Ladungsmenge Q_1 der Linienladung an, welche sich innerhalb der Hüllfläche befindet. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die Ladung Q_2 der Raumladungsdichte, welche von der Hüllfläche eingeschlossen wird. (Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\rho < a$, $a \leq \rho \leq b$ und $\rho > b$.) (5 Punkte)
- Geben Sie die von der Hüllfläche eingeschlossene Gesamtladung Q_{ges} an. (Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\rho < a$, $a \leq \rho \leq b$ und $\rho > b$.) (3 Punkte)
- Berechnen Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} im gesamten Raum. (Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\rho < a$, $a \leq \rho \leq b$ und $\rho > b$.) (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Spannung U_{12} zwischen dem Punkt P_1 bei $\rho = c$ und dem Punkt P_2 bei $\rho = b$. Hierbei soll $0 < c < a$ gelten, das Auswerten der auftretenden Integrale ist nicht erforderlich. (4 Punkte)

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 2:**(16 Punkte)**

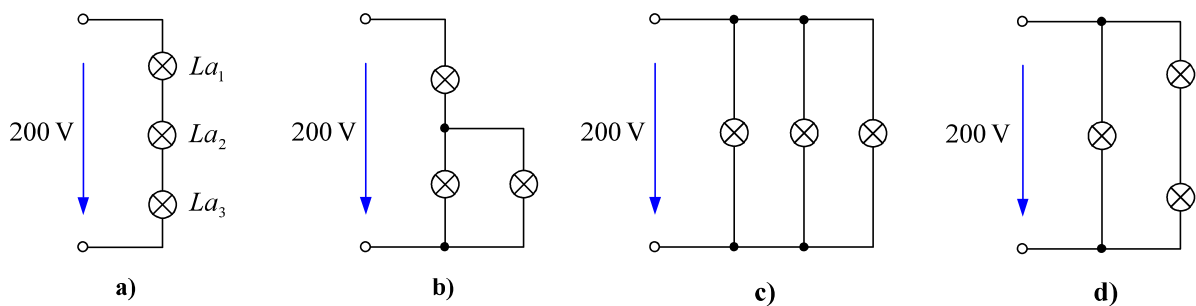
Gegeben sind drei unterschiedliche, für eine Betriebsspannung von 150 V ausgelegte Lampen La_1 , La_2 und La_3 . Sie tragen die Aufschriften

 La_1 : 150 V, 75 W La_2 : 150 V, 100 W La_3 : 150 V, 180 W

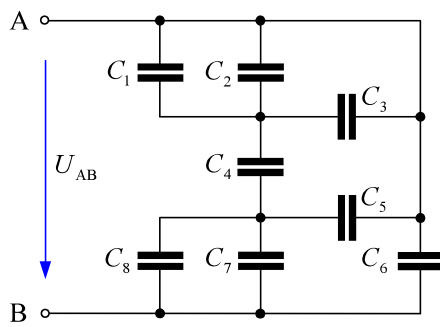
Zur Verfügung steht weiterhin eine Gleichspannungsquelle $U = 200 \text{ V}$. Die Lampen sollen jetzt an die Spannungsquelle angeschlossen werden, wobei 2 Bedingungen gelten sollen:

1. Die Spannung soll an keiner Lampe den Nennwert 150 V überschreiten.
2. Die gesamte von den Lampen aufgenommene Leistung soll einen Maximalwert annehmen.

Prinzipiell kommen die vier folgenden Schaltungsvarianten in Frage:



- Bestimmen Sie die Widerstände der Lampen. (3 Punkte)
- Für welche Schaltung a), b), c) oder d) entscheiden Sie sich? Geben Sie eine kurze stichwortartige Begründung. (4 Punkte)
- Wie groß ist die maximale Leistung unter Berücksichtigung der beiden Bedingungen? (9 Punkte)

Aufgabe 3:**(18 Punkte)**

Alle Kondensatoren in nebenstehendem Netzwerk sind zunächst ungeladen und besitzen die gleiche Kapazität C .

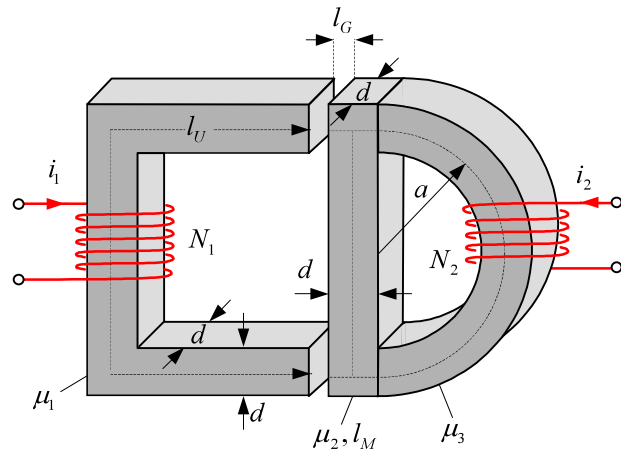
- Bestimmen Sie die Gesamtkapazität bezüglich der Klemmen A-B. (8 Punkte)
- An die Klemmen A-B wird eine Spannung U_{AB} angelegt. Wie groß sind die Spannungen U_1 bis U_8 an den einzelnen Kondensatoren? (10 Punkte)

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

Gegeben ist die dargestellte Kerngeometrie, welche aus Ferritmaterialien unterschiedlicher Permeabilität zusammengesetzt wurde. Alle drei Schenkel haben einen quadratischen Querschnitt mit der Querschnittsfläche $A = d^2$. Die effektive Weglänge des linken Außenschenkels l_U , die effektive Weglänge l_M des Mittelschenkels sowie der mittlere Radius a der Ringkernhälfte seien bekannt. Durch das Aneinanderfügen des linken Außenschenkels an den Mittelschenkel entstehen Luftspalte der Länge l_G .



Auf dem Kern befinden sich zwei Wicklungen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 . Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte \vec{B} homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss im Bereich des Luftspalts wird vernachlässigt, so dass für den Luftspalt der gleiche Querschnitt wie für den Außenschenkel angenommen werden kann.

- a) Ermitteln Sie ein Ersatzschaltbild des dargestellten magnetischen Kreises. Berechnen Sie die zugehörigen magnetischen Widerstände in Abhängigkeit der Geometrie sowie der Materialeigenschaften. Wählen Sie dabei die Flüsse Φ_U und Φ_R im linken und im rechten Außenschenkel rechtshändig orientiert zu den jeweiligen Strömen. (6 Punkte)

Für die folgenden Teilaufgaben kann davon ausgegangen werden, dass die Permeabilität μ_3 des rechten Außenschenkels als unendlich groß angenommen werden kann. Die Ergebnisse der folgenden Aufgaben sind in Abhängigkeit der magnetischen Widerstände aus Aufgabe a) anzugeben, unter Beachtung von $\mu_3 \rightarrow \infty$.

- b) Zeichnen Sie das vereinfachte Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises für diesen Fall. (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Flüsse Φ_U und Φ_R in Abhängigkeit der Ströme i_1 und i_2 . (5 Punkte)
- d) Wie groß sind die Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} sowie die Gegeninduktivität M , falls die Koppelflüsse in der gleichen Richtung wie die Flüsse Φ_U und Φ_R gezählt werden? (4 Punkte)
- e) Berechnen Sie den Koppelfaktor k in Abhängigkeit der magnetischen Widerstände. (2 Punkte)
- f) Welchen Koppelfaktor erhält man, falls zusätzlich gilt $\mu_2 \rightarrow \infty$? (1 Punkt)

Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 30. März 2009	

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:**(20 Punkte)**

$$\text{a) } Q_1 = \int_0^l \lambda dl = \lambda l$$

$$\text{b) } Q_2 = \iiint_V \rho_H(\rho) dV = \iiint_V \rho_H(\rho) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_{z=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho} \rho_H(\rho) \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = 2\pi l \int_{\rho} \rho_H(\rho) \cdot \rho \, d\rho$$

$$Q_2 = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \rho_0 2\pi l \left[\frac{1}{2}(\rho^2 - a^2) \right] & \text{für } a \leq \rho \leq b \\ \rho_0 2\pi l \left[\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right] & \rho > b \end{cases}$$

$$\text{c) } Q_{\text{ges}} = Q_1 + Q_2 = \begin{cases} Q_1 & \rho < a \\ Q_1 + \rho_0 \pi l (\rho^2 - a^2) & \text{für } a \leq \rho \leq b \\ Q_1 + \rho_0 \pi l (b^2 - a^2) & \rho > b \end{cases}$$

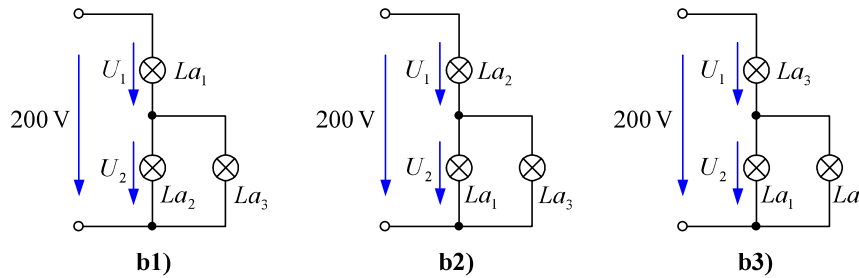
$$\text{d) } Q_{\text{ges}} = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_A \vec{e}_\rho D_\rho(\rho) \cdot \vec{e}_\rho \rho \, d\varphi \, dz = D_\rho(\rho) \rho 2\pi l \quad \rightarrow \quad E_\rho(\rho) = \frac{1}{\epsilon_0} D_\rho(\rho) = \frac{Q_{\text{ges}}}{\rho \epsilon_0 2\pi l}$$

$$\vec{E} = \vec{e}_\rho E_\rho(\rho) = \vec{e}_\rho \begin{cases} E_1(\rho) = \frac{\lambda}{\rho 2\pi \epsilon_0} & \rho < a \\ E_2(\rho) = \frac{\lambda}{\rho 2\pi \epsilon_0} + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{(\rho^2 - a^2)}{\rho} & \text{für } a \leq \rho \leq b \\ E_3(\rho) = \frac{\lambda}{\rho 2\pi \epsilon_0} + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{(b^2 - a^2)}{\rho} & \rho > b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } U_{12} &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_c^a E_1(\rho) \underbrace{\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho}_{=1} d\rho + \int_a^b E_2(\rho) \underbrace{\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho}_{=1} d\rho = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \int_c^a \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_a^b \frac{\rho^2 - a^2}{\rho} d\rho \end{aligned}$$

Aufgabe 2:**(16 Punkte)**

- a) $R_1 = \frac{150^2}{75} \Omega = 300 \Omega$, $R_2 = \frac{150^2}{100} \Omega = 225 \Omega$, $R_3 = \frac{150^2}{180} \Omega = 125 \Omega$
- b) Bei Schaltung c) liegt an jeder Lampe die Spannung 200 V, bei Variante d) wird an einer der drei Lampen die zulässige Spannung überschritten. Widerspruch zur Bedingung 1. Bei der Schaltung a) ist der Gesamtwiderstand am größten, der Strom aus der Spannungsquelle am kleinsten, d.h. die Gesamtleistung ist kleiner als bei der Schaltung b). Allerdings muss die Schaltung b) noch auf Überspannung an den Lampen geprüft werden.
- c) Es gibt jetzt drei Möglichkeiten, die Lampen nach Schaltung b) zusammenzuschalten:



Wir überprüfen die Bedingung 1 für die Schaltung b1). Beide Teilspannungen U_1 und U_2 dürfen nicht größer als 150 V werden.

$$\text{Widerstand der Parallelschaltung } R_p = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{225 \cdot 125}{225 + 125} \Omega = 80,36 \Omega$$

$$\text{Spannung an der Lampe } La_1: U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_p} 200 \text{ V} = 157,7 \text{ V}$$

Bedingung 1 ist verletzt. Diese Variante scheidet aus.

$$\text{Bedingung 1 für die Schaltung b2): } R_p = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = \frac{300 \cdot 125}{300 + 125} \Omega = 88,23 \Omega$$

$$\text{Spannung an der Lampe } La_2: U_1 = \frac{R_2}{R_2 + R_p} 200 \text{ V} = 143,66 \text{ V}$$

$$\text{Spannung an den Lampen } La_1 \text{ und } La_3: U_2 = 200 \text{ V} - U_1 = 56,34 \text{ V}$$

$$\text{Bedingung 1 ist erfüllt. Aufgenommene Leistung } P_{b2} = \frac{U_1^2}{R_2} + \frac{U_2^2}{R_p} = 127,7 \text{ W}$$

$$\text{Bedingung 1 für die Schaltung b3): } R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{300 \cdot 225}{300 + 225} \Omega = 128,6 \Omega$$

$$\text{Spannung an der Lampe } La_3: U_1 = \frac{R_3}{R_3 + R_p} 200 \text{ V} = 98,6 \text{ V}$$

$$\text{Spannung an den Lampen } La_1 \text{ und } La_2: U_2 = 200 \text{ V} - U_1 = 101,4 \text{ V}$$

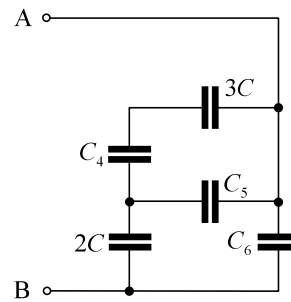
Bedingung 1 ist erfüllt. Aufgenommene Leistung

$$P_{b3} = \frac{U_1^2}{R_3} + \frac{U_2^2}{R_p} = 157,7 \text{ W}$$

Ergebnis: Die beiden Lampen mit den größeren Widerständen werden parallel geschaltet.

Aufgabe 3:**(18 Punkte)**

- a) Schrittweise Vereinfachung des Netzwerks:
 Parallelschaltung von C_1, C_2, C_3 ergibt $3C$
 Parallelschaltung von C_7, C_8 ergibt $2C$
 Zwischenergebnis:

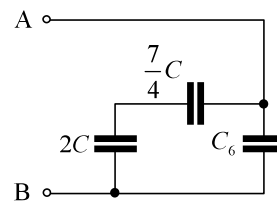


Reihenschaltung von $3C$ und C_4 ergibt $\frac{3C \cdot C}{3C + C} = \frac{3}{4}C$

Diesen Kondensator parallel schalten zu C_5

ergibt $\frac{3}{4}C + C = \frac{7}{4}C$

Zwischenergebnis:



Reihenschaltung von $\frac{7}{4}C$ und $2C$ ergibt $\frac{\frac{7}{4}C \cdot 2C}{\frac{7}{4}C + 2C} = \frac{14C}{7+8} = \frac{14}{15}C$

Parallelschaltung mit C_6 ergibt $C_{AB} = \frac{14}{15}C + C = \frac{29}{15}C$

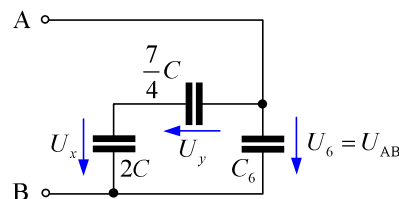
- b) Auf den in Reihe liegenden Kondensatoren befinden sich gleiche Ladungen

$$Q = \frac{7}{4}C \cdot U_y = 2C \cdot U_x \rightarrow U_x = \frac{7}{8}U_y$$

Mit $U_x + U_y = U_{AB}$ folgt

$$U_x = \frac{7}{15}U_{AB} \text{ und } U_y = \frac{8}{15}U_{AB}$$

$$\rightarrow \boxed{U_5 = U_y = \frac{8}{15}U_{AB}}, \quad \boxed{U_6 = U_{AB}}, \quad \boxed{U_7 = U_8 = U_x = \frac{7}{15}U_{AB}}$$



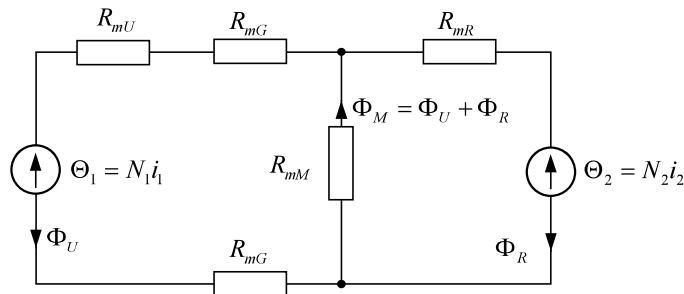
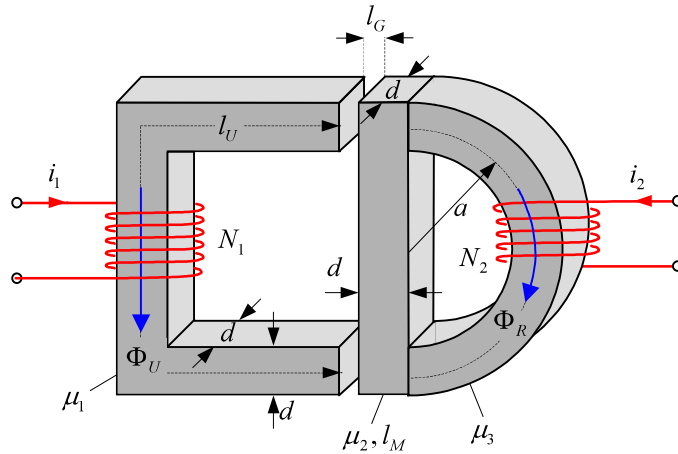
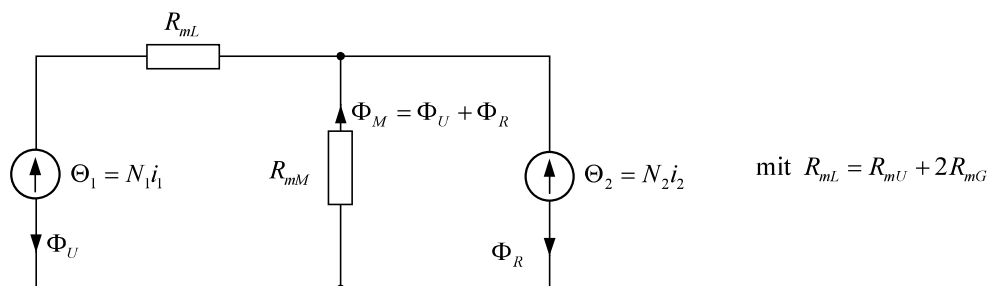
Die Spannung U_y liegt an der Reihenschaltung $3C$ und $C_4 = C$

$$\rightarrow \boxed{U_4 = \frac{3}{4}U_y = \frac{2}{5}U_{AB}}, \text{ an } 3C \text{ liegt } \frac{1}{4}U_y, \rightarrow \boxed{U_{1,2,3} = \frac{2}{15}U_{AB}}$$

Aufgabe 4:**(20 Punkte)**

a) Magnetische Widerstände:

$$R_{mU} = \frac{l_U}{\mu_1 d^2} \quad R_{mG} = \frac{l_G}{\mu_0 d^2} \quad R_{mM} = \frac{l_M}{\mu_2 d^2} \quad R_{mR} = \frac{a\pi}{\mu_3 d^2}$$

b) Der magnetische Widerstand der Ringkernhälfte verschwindet für $\mu_3 \rightarrow \infty$: $R_{mR} \xrightarrow{\mu_3 \rightarrow \infty} 0$ c) Linke Masche: $-N_1 i_1 + (\Phi_U + \Phi_R) R_{mM} + R_{mL} \Phi_U = 0 \quad (1)$ Rechte Masche: $-N_2 i_2 + (\Phi_U + \Phi_R) R_{mM} = 0 \quad (2)$ Aus (2): $\Phi_U = \frac{N_2 i_2}{R_{mM}} - \Phi_R \quad (3)$ (3) in (1): $-N_1 i_1 + (R_{mM} + R_{mL}) \left(\frac{N_2 i_2}{R_{mM}} - \Phi_R \right) + R_{mM} \Phi_R = 0$

$$-N_1 i_1 + (R_{mM} + R_{mL}) \frac{N_2 i_2}{R_{mM}} + (R_{mM} - R_{mM} - R_{mL}) \Phi_R = 0$$

$$-N_1 i_1 + \frac{R_{mM} + R_{mL}}{R_{mM}} N_2 i_2 - R_{mL} \Phi_R = 0$$

$$\Phi_R = \frac{-N_1 i_1}{R_{mL}} + \frac{R_{mM} + R_{mL}}{R_{mL} R_{mM}} N_2 i_2 \quad (4)$$

(4) in (3):

$$\Phi_U = N_2 i_2 \left(\frac{1}{R_{mM}} - \frac{R_{mM} + R_{mL}}{R_{mM} R_{mL}} \right) + \frac{N_1 i_1}{R_{mL}} = -\frac{N_2 i_2}{R_{mL}} + \frac{N_1 i_1}{R_{mL}}$$

$$d) \quad L_{11} = \frac{\Phi_{11}|_{i_2=0}}{i_1} = \frac{N_1 \cdot \Phi_U|_{i_2=0}}{i_1} \rightarrow \boxed{L_{11} = N_1^2 \frac{1}{R_{mL}}}$$

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}|_{i_1=0}}{i_2} = \frac{N_2 \cdot \Phi_R|_{i_1=0}}{i_2} \rightarrow \boxed{L_{22} = N_2^2 \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}}}$$

$$M = L_{21} = \frac{\Phi_{21}|_{i_2=0}}{i_1} = \frac{N_2 \cdot \Phi_R|_{i_2=0}}{i_1} \rightarrow \boxed{M = L_{21} = -N_2 N_1 \frac{1}{R_{mL}}}$$

bzw.

$$M = L_{12} = \frac{\Phi_{12}|_{i_1=0}}{i_2} = \frac{N_1 \cdot \Phi_U|_{i_1=0}}{i_2} \rightarrow \boxed{M = L_{12} = -N_1 N_2 \frac{1}{R_{mL}}}$$

$$e) \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} = \frac{-\frac{N_1 N_2}{R_{mL}}}{\sqrt{\frac{N_1^2}{R_{mL}} \cdot N_2^2 \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}}}} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mM}}}} = -\sqrt{\frac{R_{mM}}{R_{mL} + R_{mM}}}$$

$$f) \quad R_{mM}|_{\mu_2 \rightarrow \infty} = 0 \rightarrow k|_{\mu_2 \rightarrow \infty} = 0$$