

<b>Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder</b>	<b>Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg</b>
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
<b>Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 22. September 2008</b>	

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

6 Aufgaben

(100 Punkte)

**Aufgabe 1:****(10 Punkte)**

Ein Spannungsteiler, der durch das Potentiometer mit dem Gesamtwiderstand  $R$  gebildet wird, liegt an einer Gleichspannung  $U_0$ . Am Spannungsabgriff liegt im unbelasteten Zustand nach Abbildung a) eine Spannung von  $U_L = U_0 / 2$ .

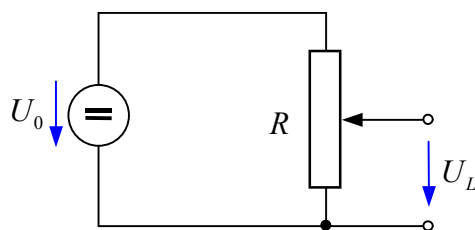


Abbildung a)

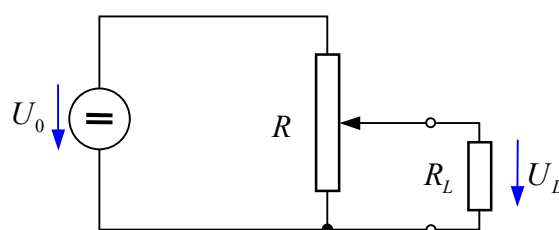


Abbildung b)

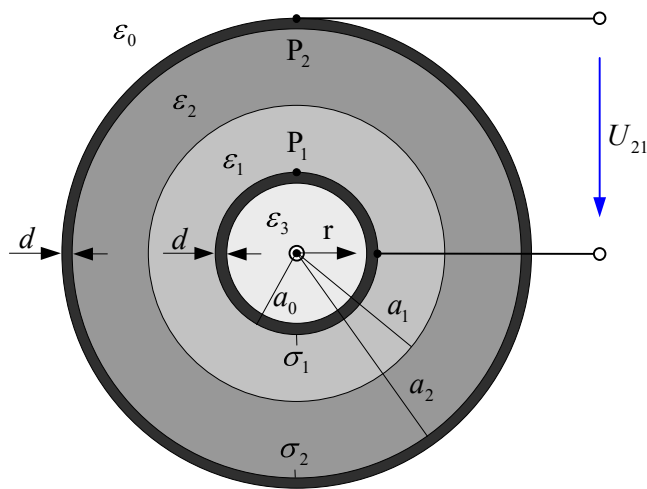
- a) Ermitteln Sie ein Ersatzschaltbild mit entsprechend gewählten Widerständen, so dass sich die geforderte Spannung am Mittelabgriff einstellt. (2 Punkte)

Im Folgenden wird der Spannungsteiler, wie in Abbildung b) zu sehen, mit dem Widerstand  $R_L$  belastet.

- b) Bestimmen Sie die sich nun einstellende Spannung  $U_L$ . (4 Punkte)
- c) Wie groß muss der Widerstand  $R$  gewählt werden, damit sich die Spannung bei Belastung mit  $R_L$  um maximal 1% gegenüber dem unbelasteten Fall verringert? (4 Punkte)

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 2:****(20 Punkte)**

Gegeben sei nebenstehende Kugelanordnung, die aus einer metallischen Hohlkugel mit dem Außenradius  $a_0$  und einer weiteren metallischen Hohlkugel mit dem Innenradius  $a_2 > a_0$  besteht.

Zwischen den metallischen Kugeln der gleichen Wandstärke  $d$  befinden sich im Bereich  $a_0 < r < a_1$  ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$ , sowie im Bereich  $a_1 < r < a_2$  ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_2$ .

Innerhalb der inneren metallischen Kugel, im Bereich  $r < a_0 - d$  befindet sich ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_3$  und außerhalb der äußeren metallischen Kugel, im Bereich  $r > a_2 + d$  gilt die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon_0$ .

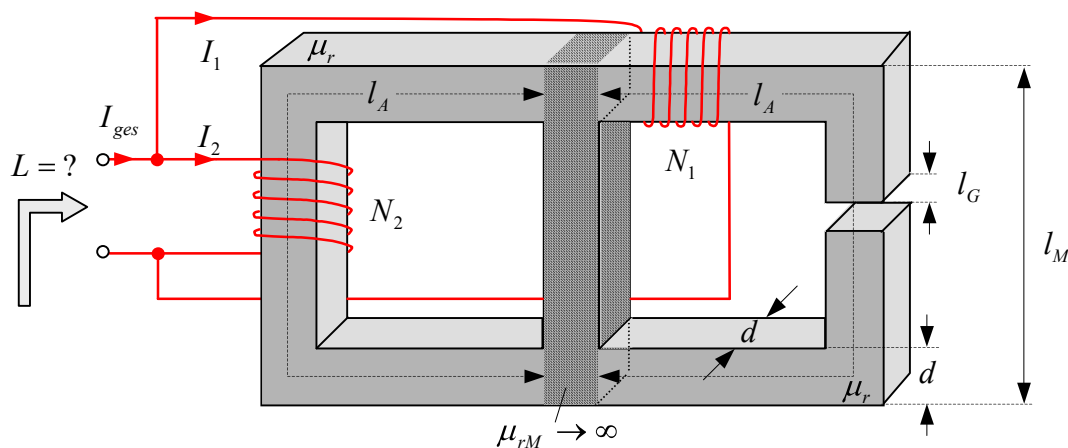
Zwischen den metallischen Kugeln wird eine Gleichspannung  $U_{21}$  entsprechend der Orientierung in obenstehender Zeichnung angelegt. Die einzigen Ladungen sind die infolge der angelegten Spannung auftretenden Flächenladungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , die sich bei  $a_0$  und  $a_2$  befinden.

- Berechnen Sie die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$  und die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  im gesamten Raum in Abhängigkeit von den Abmessungen, den Dielektrizitätskonstanten sowie den Flächenladungen (der Beitrag der Zuleitungen ist zu vernachlässigen). (9 Punkte)
- Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Spannung  $U_{21}$  und der Flächenladung  $\sigma_1$  her. (5 Punkte)
- Bestimmen Sie die Kapazität zwischen den metallischen Kugeln. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die zwischen den Metallkugeln gespeicherte Energie als Funktion der Spannung  $U_{21}$ . (3 Punkte)

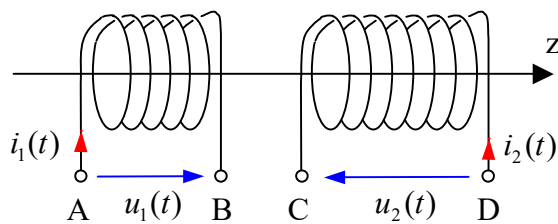
**Aufgabe 4:****(20 Punkte)**

Gegeben ist ein aus Ferritmaterial (Permeabilitätszahl  $\mu_r$ ) bestehender Kern, dessen Permeabilität im Mittelschenkel (Permeabilitätszahl  $\mu_{rM} \rightarrow \infty$ ) als unendlich hoch angesehen werden kann. Alle drei Schenkel haben einen quadratischen Querschnitt mit der Querschnittsfläche  $A = d^2$ . Die effektive Weglänge der beiden Außenschenkel  $l_A$  sei bekannt, ebenso die effektive Weglänge  $l_M$  des Mittelschenkels. Aus dem rechten Außenschenkel wird ein Teil des Ferritmaterials entfernt, so dass ein Luftspalt der Länge  $l_G$  entsteht.

Auf dem Kern befinden sich zwei parallel geschaltete Wicklungen mit den Windungszahlen  $N_1$  und  $N_2$ . Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss beim Luftspalt wird vernachlässigt, so dass für den Luftspalt der gleiche Querschnitt wie für den Mittelschenkel angenommen werden kann.



- Geben Sie die magnetischen Widerstände  $R_{mL}$  und  $R_{mR}$  des linken und rechten Schenkels sowie  $R_{mM}$  des mittleren Schenkels an. (4 Punkte)
- Legen Sie Ihre eigenen Zählrichtungen für die magnetischen Flüsse  $\Phi_L$  und  $\Phi_R$  durch den linken und rechten Schenkel sowie  $\Phi_M$  durch den Mittelschenkel fest und tragen Sie diese in die Abbildung der Aufgabenstellung ein. Zeichnen Sie ein vollständiges magnetisches Ersatzschaltbild mit den gewählten Flussrichtungen und bestimmen Sie den Fluss im Mittelschenkel  $\Phi_M$  in Abhängigkeit der Flüsse der Außenschenkel. (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Gesamtinduktivität  $L$  sowie die Gegeninduktivität  $M$  der beiden Wicklungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen. (8 Punkte)
- Der ohmsche Widerstand  $R_{DC}$  sei für beide Wicklungen gleich groß. Wie groß ist das Verhältnis  $I_1/I_2$  für den Fall, dass die Spule mit Gleichstrom gespeist wird ( $I_{ges} = \text{const.}$ )? Wie ändert sich die Stromaufteilung  $\hat{i}_1/\hat{i}_2$  für Wechselstrom, wenn die ohmschen Widerstände der Wicklungen vernachlässigbar gegenüber den Blindwiderständen sind? (2 Punkte)

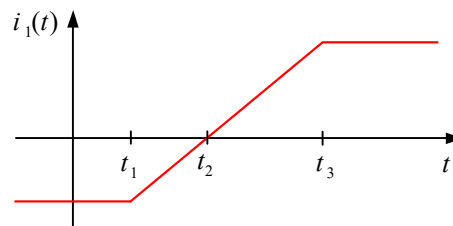
**Aufgabe 5:****(14 Punkte)**

Gegeben ist die nebenstehende Anordnung zweier gekoppelter Spulen. Die Mittelpunkte beider Spulen befinden sich auf der z-Achse. Der ohmsche Widerstand der Wicklungen sei vernachlässigbar klein.

Die Selbstinduktivität  $L_{11}$  der linken Spule, die Selbstinduktivität  $L_{22}$  der rechten Spule sowie die Gegeninduktivität  $M$  der beiden Spulen seien bekannt.

- Berechnen Sie die Gesamtinduktivität zwischen den Punkten A und D, falls B und C leitend miteinander verbunden werden. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Gesamtinduktivität zwischen den Punkten A und C, falls B und D leitend miteinander verbunden werden. (4 Punkte)

Im Folgenden gibt es keine leitende Verbindung zwischen den beiden Spulen. Der Strom  $i_1(t)$  nimmt zunächst den folgenden Verlauf an. Für den Strom in der rechten Spule gilt  $i_2(t) = 0$ .

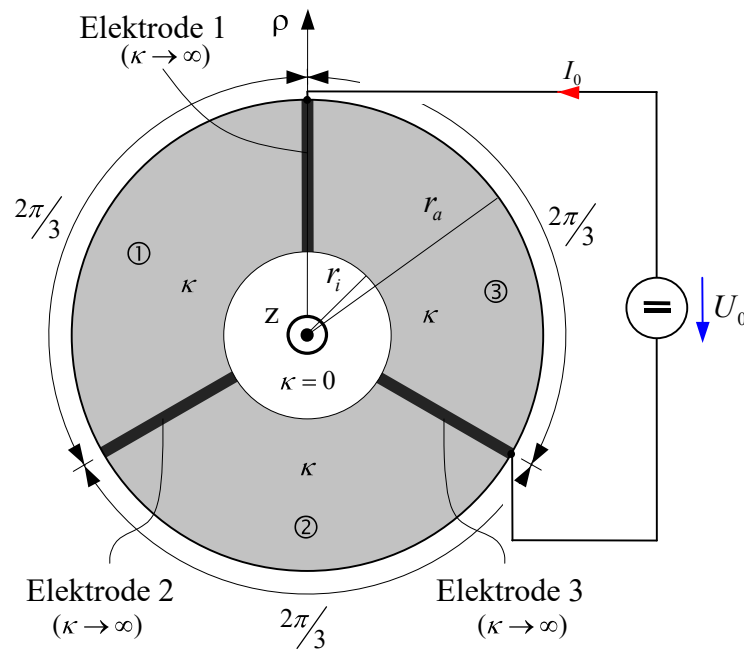


- Skizzieren Sie den prinzipiellen zeitlichen Verlauf der Spannung  $u_2(t)$ . (3 Punkte)

Jetzt wird die linke Spule von einem Gleichstrom  $i_1(t) = I_0$  durchflossen, die rechte Spule ist stromlos. Zudem wird die linke Spule entgegen der Richtung der z-Achse (nach links) bewegt.

- Geben Sie das Vorzeichen der Spannung  $u_2(t)$  an und begründen Sie Ihr Ergebnis. (3 Punkte)

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

**Aufgabe 6:****(16 Punkte)**

Um die  $z$ -Achse eines Zylinderkoordinatensystems ist ein unendlich langer zylindrischer Hohlleiter kreisförmigen Querschnitts mit Innenradius  $r_i$  und Außenradius  $r_a$  angeordnet. Der Hohlleiter besteht aus drei gleichen Teilkörpern ①, ② und ③ der Leitfähigkeit  $\kappa$ . Zwischen den Teilkörpern sind dünne, dem zylindrischen Aufbau angepasste metallische Elektroden ( $\kappa \rightarrow \infty$ ) eingebracht.

Die Dicke der metallischen Elektroden ist gegenüber den anderen Abmessungen zu vernachlässigen.

An die Elektroden, die den Bereich ③ einschließen, wird entsprechend der Abbildung die Gleichspannung  $U_0$  angelegt, so dass die Anordnung pro Längeneinheit der Koordinate  $z$  vom Strom  $I_0$  durchflossen wird.

Für die Stromdichte  $\vec{J}_i$  in den verschiedenen Teilbereichen gilt der Ansatz  $\vec{J}_i = J_i(\rho)\vec{e}_\varphi$ .

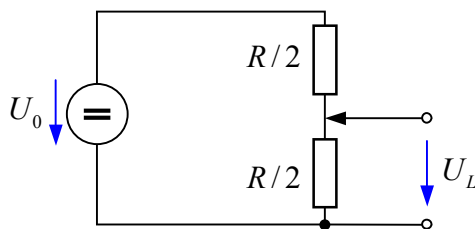
- Geben Sie ein elektrisches Ersatzschaltbild der Anordnung an und bestimmen Sie die Stromaufteilung in den Bereichen ①, ② und ③. (5 Punkte)
- Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  sowie die Stromdichte  $\vec{J}$  in den Bereichen ①, ② und ③. (6 Punkte)
- Bestimmen Sie den Gesamtstrom  $I_0$ , der pro Längeneinheit durch die Anordnung fließt. (5 Punkte)

<b>Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder</b>	<b>Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg</b>
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
<b>Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 22. September 2008</b>	

## MUSTERLÖSUNG

**Aufgabe 1:****(10 Punkte)**

- a) Da sich im unbelasteten Zustand genau die halbe Eingangsspannung am Spannungsabgriff einstellt, liegt dieser genau in der Mitte von  $R$ , d.h. das folgende Ersatzschaltbild kann zugrunde gelegt werden.



$$\begin{aligned}
 \text{b) } U_L &= \frac{\frac{R/2 \cdot R_L}{R/2 + R_L}}{\frac{R/2}{R/2 + R_L} + \frac{R/2 \cdot R_L}{R/2 + R_L}} U_0 = \frac{R/2 \cdot R_L}{(R/2 + R_L) \cdot R/2 + R/2 \cdot R_L} U_0 = \frac{2R_L}{R + 4R_L} U_0 \\
 \text{c) } U_L &= \frac{2R_L}{R + 4R_L} U_0 \geq 0,99 \frac{U_0}{2} \quad \rightarrow \quad 2R_L - 0,495 \cdot 4R_L \geq 0,495 R \\
 &\rightarrow \quad R \leq \frac{2 - 0,495 \cdot 4}{0,495} R_L \approx 0,04 R_L
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 2:****(20 Punkte)**

- a) Entsprechend der Geometrie und den Bereichen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften müssen für die Berechnung der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  und der elektrischen Flussdichte  $\vec{D}$  sechs Teilräume  $0 \leq r < a_0 - d$ ,  $a_0 - d \leq r < a_0$ ,  $a_0 \leq r < a_1$ ,  $a_1 \leq r < a_2$ ,  $a_2 \leq r < a_2 + d$  und  $r \geq a_2 + d$  unterschieden werden.

Bereich 1:  $0 \leq r < a_0 - d$

Faradayscher Käfig, Ladungsfreiheit im Inneren:  $\vec{E}_1 = \vec{0}$  und  $\vec{D}_1 = \vec{0}$ .

Bereich 2:  $a_0 - d \leq r < a_0$

Feldfreiheit von metallischen Leitern:  $\vec{E}_2 = \vec{0}$  und  $\vec{D}_2 = \vec{0}$ .

Bereiche 3 und 4:  $a_0 \leq r < a_1$  und  $a_1 \leq r < a_2$

Diese beiden Bereiche schließen die innere geladene Hohlkugel komplett ein, so dass mit dem Ansatz für die elektrische Feldstärke  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  und der elektrischen Flussdichte  $\vec{D} = D(r)\vec{e}_r$  der folgende Zusammenhang gilt:

$$Q = \oint_{\text{Kugel}} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_A D(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{A} = \oint_A D(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} dA = D(r) 4\pi r^2$$

Die Gesamtladung  $Q$  erhält man durch Integration der Flächenladung  $\sigma_1$  über die ladungsbesetzte Fläche.

$$Q = \int_{\text{Kugel}} \sigma_1 dA = 4\pi a_0^2 \sigma_1.$$

Daraus resultiert die von  $r$  abhängige Flussdichte

$$D(r) 4\pi r^2 = 4\pi a_0^2 \sigma_1 \rightarrow D(r) = \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1 \rightarrow \vec{D}_3 = \vec{D}_4 = \vec{e}_r \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1$$

Unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  in den Bereichen  $a_0 < r < a_1$  und  $a_1 < r < a_2$  erhält man die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{\epsilon_1} \vec{D}_3 = \vec{e}_r \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1 \quad \text{für } a_0 < r < a_1$$

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{\epsilon_2} \vec{D}_4 = \vec{e}_r \frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1 \quad \text{für } a_1 < r < a_2$$

Bereich 5:  $a_2 \leq r < a_2 + d$

Feldfreiheit von metallischen Leitern:  $\vec{E}_5 = \vec{0}$  und  $\vec{D}_5 = \vec{0}$ .

Bereich 6:  $r \geq a_2 + d$ :

Da die Gesamtladungen auf den beiden Metallzylindern entgegengesetzt gleich groß sind, verschwindet das Hüllflächenintegral auch für  $r \geq a_2 + d$ . Auch in diesem Bereich gilt

$$\vec{E}_6 = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{D}_6 = \vec{0}.$$

b) Spannung  $U_{21}$

$$\begin{aligned} U_{21} &= \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{a_2}^{a_0} E(r) \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} dr = \int_{a_2}^{a_1} E_4(r) dr + \int_{a_1}^{a_0} E_3(r) dr = \\ &= \int_{a_2}^{a_1} \frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1 dr + \int_{a_1}^{a_0} \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0^2}{r^2} \sigma_1 dr = \frac{1}{\epsilon_2} a_0^2 \sigma_1 \int_{a_2}^{a_1} \frac{1}{r^2} dr + \frac{1}{\epsilon_1} a_0^2 \sigma_1 \int_{a_1}^{a_0} \frac{1}{r^2} dr = \\ &= a_0^2 \sigma_1 \left( \frac{1}{\epsilon_2} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{a_2}^{a_1} + \frac{1}{\epsilon_1} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{a_1}^{a_0} \right) = a_0^2 \sigma_1 \left( \frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1} \right) \end{aligned}$$

c) Kapazität zwischen den metallischen Kugeln

$$C = \frac{Q}{U_{21}} = \frac{4\pi a_0^2 \sigma_1}{a_0^2 \sigma_1 \left( \frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1} \right)} = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1}}$$

## d) Gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} C U_{21}^2 = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0 - a_1}{a_0 a_1}} U_{21}^2 = \frac{2\pi a_1}{\frac{1}{\epsilon_2} \frac{a_1 - a_2}{a_2} + \frac{1}{\epsilon_1} \frac{a_0 - a_1}{a_0}} U_{21}^2$$

**Aufgabe 3:****(20 Punkte)**

a)  $\underline{Z}_M = R_M + j\omega L_M$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{34}} = j\omega C_L + \frac{1}{R_L + j\omega L_L + \underline{Z}_M} = \frac{j\omega C_L (R_L + j\omega L_L + \underline{Z}_M) + 1}{R_L + j\omega L_L + \underline{Z}_M}$$

$$\underline{Z}_{34} = \frac{R_L + j\omega L_L + \underline{Z}_M}{j\omega C_L (R_L + j\omega L_L + \underline{Z}_M) + 1}$$

b)  $\underline{Z}_{12} = j\omega L_F + \underline{Z}_x$

$$\text{mit } \frac{1}{\underline{Z}_x} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_F} + R_F} + \frac{1}{\underline{Z}_{34}} = \frac{j\omega C_F}{1 + j\omega C_F R_F} + \frac{1}{\underline{Z}_{34}} = \frac{j\omega C_F \underline{Z}_{34} + 1 + j\omega C_F R_F}{\underline{Z}_{34} (1 + j\omega C_F R_F)}$$

$$\underline{Z}_x = \frac{\underline{Z}_{34} (1 + j\omega C_F R_F)}{j\omega C_F (\underline{Z}_{34} + R_F) + 1}$$

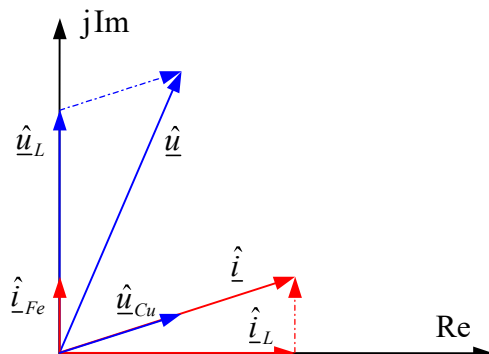
$$\underline{Z}_{12} = j\omega L_F + \frac{\underline{Z}_{34} (1 + j\omega C_F R_F)}{j\omega C_F (\underline{Z}_{34} + R_F) + 1}$$

c) Strom aus Quelle:  $\hat{i}_0 = \frac{\hat{u}_0}{\underline{Z}_{12}}$

$$\text{Damit: } \hat{i}_F = \frac{\underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_{34} + \underline{Z}_F} \hat{i}_0 \quad \text{mit } \underline{Z}_F = R_F + \frac{1}{j\omega C_F}$$

$$\rightarrow \hat{i}_F = \frac{\underline{Z}_{34}}{\underline{Z}_{34} + R_F + \frac{1}{j\omega C_F}} \hat{i}_0 = \frac{\underline{Z}_{34}}{\left( \underline{Z}_{34} + R_F + \frac{1}{j\omega C_F} \right) \underline{Z}_{12}} \hat{u}_0$$

## d) Zeigerdiagramm:





**Aufgabe 4:****(20 Punkte)**

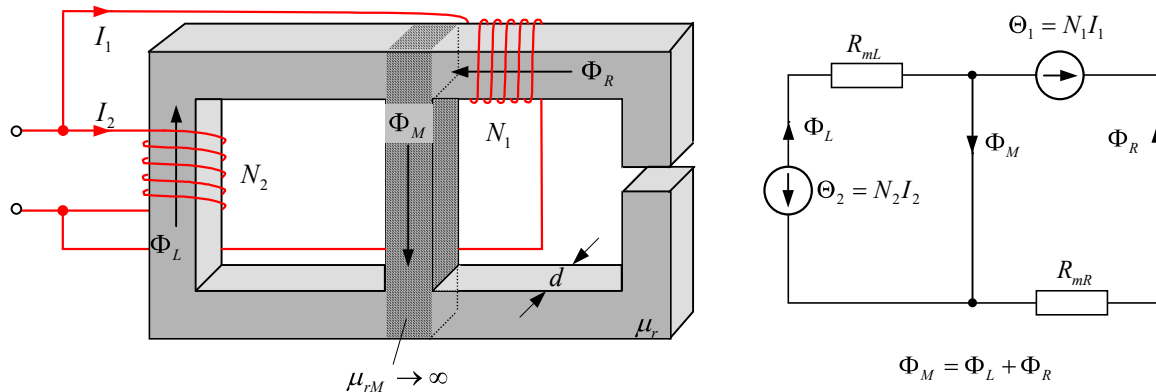
a) Magnetische Widerstände:

$$R_{mL} = \frac{l_A}{\mu d^2} = \frac{l_A}{\mu_r \mu_0 d^2}$$

$$R_{mM} \xrightarrow{\mu_r \rightarrow \infty} 0$$

$$R_{mR} = \frac{l_A - l_G}{\mu d^2} + \frac{l_G}{\mu_0 d^2} = \frac{1}{\mu_r \mu_0 d^2} [l_A + (\mu_r - 1)l_G]$$

b)

c) Knotenregel:  $\Phi_L + \Phi_R = \Phi_M$ 

$$\text{Linke Masche: } N_2 I_2 = \Phi_L R_{mL} \quad \rightarrow \quad \Phi_L = \frac{N_2 I_2}{R_{mL}}$$

$$\text{Rechte Masche: } N_1 I_1 = \Phi_R R_{mR} \quad \rightarrow \quad \Phi_R = \frac{N_1 I_1}{R_{mR}}$$

Die zwei Wicklungen sind aufgrund des magnetischen Kurzschlusses entkoppelt, daher gilt  $M = 0$ . Demnach können die beiden Wicklungen unabhängig voneinander betrachtet werden:

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{N_1 \Phi_R}{I_1} = \frac{N_1^2}{R_{mR}} \quad \text{und} \quad L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2 \Phi_L}{I_2} = \frac{N_2^2}{R_{mL}}$$

Die beiden Wicklungen sind bezüglich der Anschlussklemmen parallel geschaltet. Somit erhält man für die Gesamtinduktivität:

$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} = \frac{N_1^2 N_2^2}{N_1^2 R_{mL} + N_2^2 R_{mR}}$$

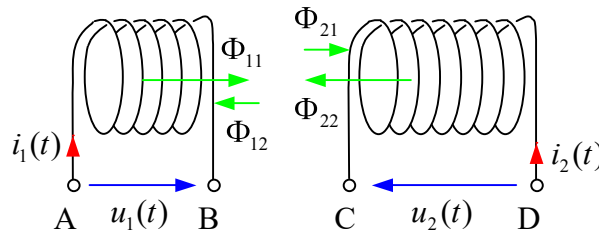
d) Im Gleichstromfall teilt sich der Strom bei gleichem Widerstand der Wicklungen hälftig auf mit  $I_1/I_2 = 0,5$ .

Für Wechselstrom teilt sich der Strom gemäß der Stromteilerregel auf mit

$$\hat{i}_1 / \hat{i}_2 = \frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2 R_{mR}}{N_1^2 R_{mL}}.$$

**Aufgabe 5:****(14 Punkte)**

- a) Mit den festgelegten Zählrichtungen für die beiden Ströme  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  ergeben sich die rechtshändig verknüpften magnetischen Flüsse wie in folgender Abbildung gezeigt.



Da sich die durch die positiv gezählten Ströme hervorgerufenen Flüsse nicht unterstützen, gilt das Gleichungssystem (6.79).

$$u_1(t) = L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt}$$

Somit erhält man:

$$u_2(t) = -M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt}$$

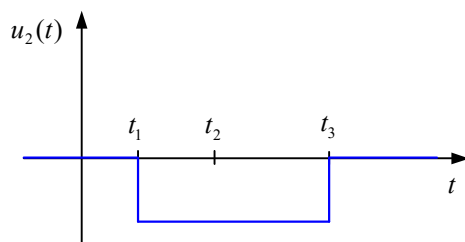
Werden B und C leitend miteinander verbunden, so ergibt sich für die Spannung  $u_{AD}$  zwischen den Punkten A und D:  $u_{AD}(t) = u_1(t) - u_2(t)$ . Für die Ströme gilt dann  $i_1(t) = -i_2(t)$ . Dementsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} u_{AD}(t) &= L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} - L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} = \\ &= L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_1(t)}{dt} = \underbrace{(L_{11} + 2M + L_{22})}_{L_{AD}} \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned}$$

- b) Werden B und D leitend miteinander verbunden, so ergibt sich für die Spannung  $u_{AC}$  zwischen den Punkten A und C:  $u_{AC}(t) = u_1(t) + u_2(t)$ . Für die Ströme gilt dann  $i_1(t) = i_2(t)$ . Dementsprechend ergibt sich

$$\begin{aligned} u_{AC}(t) &= L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_2(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_2(t)}{dt} = \\ &= L_{11} \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} - M \frac{di_1(t)}{dt} + L_{22} \frac{di_1(t)}{dt} = \underbrace{(L_{11} - 2M + L_{22})}_{L_{AC}} \frac{di_1(t)}{dt} \end{aligned}$$

- c) Zeitlicher Verlauf der Spannung  $u_2(t)$

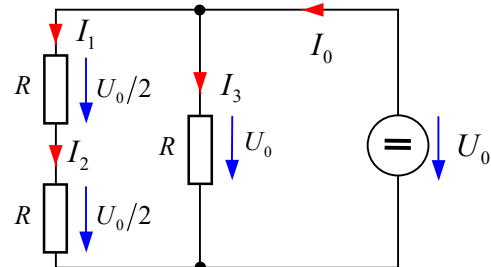


- d) Durch die Fortbewegung der linken Spule vergrößert sich die Distanz zwischen beiden Spulen und somit durchsetzt weniger Fluss der linken Spule die von der rechten Spule aufgespannte Fläche. Demnach ist die zeitliche Änderung des Flusses am Ort der rechten Spule negativ. Aufgrund der gegebenen Zählrichtung ist die Spannung  $u_2(t)$  positiv.

$$u_2(t) = -\frac{d\Phi_{\text{rechth.}}}{dt} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -\frac{\overbrace{d\Phi_{21}}^{<0}}{\underbrace{dt}_{>0}}$$

**Aufgabe 6:****(16 Punkte)**

- a) Da die Anordnung völlig symmetrisch ist und alle drei Teilbereiche die gleiche Leitfähigkeit  $\kappa$  und damit den gleichen ohmschen Widerstand  $R$  besitzen, ergibt sich das nebenstehende elektrische Ersatzschaltbild. Damit erhält man folgende Stromaufteilung in den 3 Teilbereichen:



$$I_1 = I_2 = \frac{1}{3} I_0 \quad \text{und} \quad I_3 = \frac{2}{3} I_0$$

- b) Das elektrische Feld besitzt die gleiche Orientierung wie die Stromdichte, so dass der Ansatz  $\vec{E}_i = E_i(\rho) \vec{e}_\varphi$  gilt.

$$\text{Teilbereich ①:} \quad \int_{\text{Elektrode 1}}^{\text{Elektrode 2}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi=0}^{\frac{2\pi}{3}} E_1(\rho) \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{=1} \rho d\varphi = \frac{E_1(\rho) 2\pi \rho}{3} = \frac{U_0}{2} \rightarrow \vec{E}_1 = \frac{3U_0}{4\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Teilbereich ②:} \quad \int_{\text{Elektrode 2}}^{\text{Elektrode 3}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi=\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} E_2(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \rho d\varphi = \frac{E_2(\rho) 2\pi \rho}{3} = \frac{U_0}{2} \rightarrow \vec{E}_2 = \frac{3U_0}{4\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Teilbereich ③:} \quad \int_{\text{Elektrode 1}}^{\text{Elektrode 3}} \vec{E}_3 \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi=0}^{\frac{2\pi}{3}} E_3(\rho) \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \rho d\varphi = -\frac{E_3(\rho) 2\pi \rho}{3} = U_0 \rightarrow \vec{E}_3 = -\frac{3U_0}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

Für die Stromdichten gilt dementsprechend:

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \kappa \vec{E}_1 = \frac{3U_0 \kappa}{4\pi \rho} \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \vec{J}_3 = \kappa \vec{E}_3 = -\frac{3U_0 \kappa}{2\pi \rho} \vec{e}_\varphi$$

- c) Gesamtstrom pro Längeneinheit:

$$I_i = \iint_A \vec{J}_i \cdot d\vec{A} = \int_{z=0}^l \int_{\rho=r_i}^{r_a} J_i(\rho) \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{=1} \rho d\rho dz = l \int_{r_i}^{r_a} J_i(\rho) d\rho$$

$$\rightarrow \quad \frac{I_1}{l} = \frac{I_2}{l} = \int_{r_i}^{r_a} \frac{3U_0 \kappa}{4\pi \rho} d\rho = \frac{3U_0 \kappa}{4\pi} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{3U_0 \kappa}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_i} \quad \text{und} \quad \frac{I_3}{l} = 2 \frac{I_1}{l}$$

$$\text{Gesamtstrom pro Längeneinheit:} \quad \frac{I_0}{l} = \frac{I_1}{l} + \frac{I_3}{l} = 3 \frac{I_1}{l} = \frac{9U_0 \kappa}{4\pi} \ln \frac{r_a}{r_i}$$