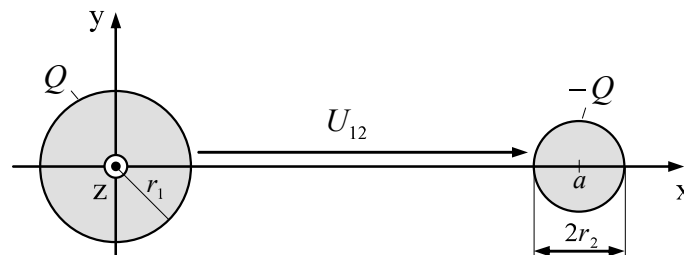


Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 28. September 2010	

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
6 Aufgaben

(100 Punkte)

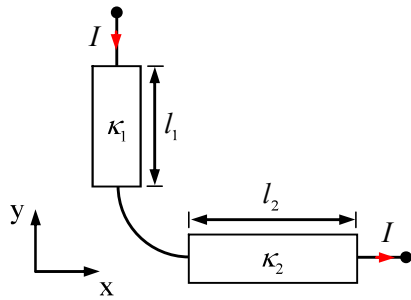
Aufgabe 1:**(20 Punkte)**

Das Bild zeigt den Querschnitt zweier Metallkugeln. Die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Raums sei ϵ_0 .

Die linke Metallkugel mit dem Radius r_1 trägt auf der Oberfläche die Ladung Q und ist konzentrisch um den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (x, y, z) angeordnet. Der Mittelpunkt der rechten Metallkugel mit dem Radius r_2 und der Ladung $-Q$ auf der Oberfläche befindet sich auf der x -Achse bei $x = a$.

Für den Abstand a gilt $a \gg r_1$ und $a \gg r_2$, so dass die Ladungen auf den Oberflächen der Kugeln homogen verteilt sind.

- Ermitteln Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} auf der x -Achse im Intervall $r_1 < x < a - r_2$ durch Überlagerung der Beiträge von beiden Metallkugeln. (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Spannung U_{12} zwischen den beiden Metallkugeln. (6 Punkte)
- Welche Kraft wirkt auf die Kugel mit dem Radius r_2 ?
Hinweis: Die Kugeln können durch Punktladungen ersetzt werden. (2 Punkte)
- Welche Arbeit muss geleistet werden, um den Abstand zwischen den Kugeln auf $2a$ zu verdoppeln? (6 Punkte)

Aufgabe 2:**(15 Punkte)**

Zwei Materialstücke (Querschnittsfläche A , Länge l_1 bzw. l_2 , Leitfähigkeit κ_1 bzw. κ_2) werden von einem bekannten Gleichstrom I in der gezeichneten Weise durchflossen. Innerhalb der Materialstücke kann die Stromdichte \vec{J} als homogen angenommen werden. Die Zuleitungen und die Verbindung zwischen den beiden Materialstücken können bei allen Rechnungen vernachlässigt werden.

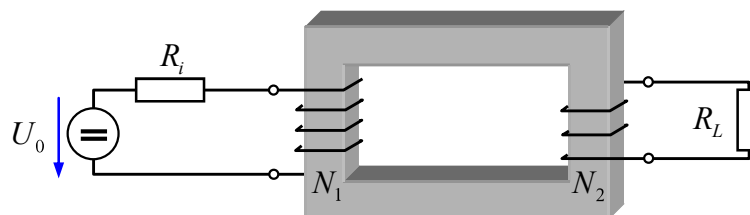
- Geben Sie die Stromdichte \vec{J} innerhalb der Materialien an. (2 Punkte)
- Wie groß ist die elektrische Feldstärke \vec{E} im Bereich der Materialstücke? (2 Punkte)
- Welche Spannung U tritt zwischen den beiden Anschlussklemmen auf? Es soll vom Verbraucherschlupfsystem ausgegangen werden. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand R der Anordnung. (2 Punkte)

Hinweis: Teilaufgabe e) ist unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben lösbar!

- Berechnen Sie den Wert der spezifischen Leitfähigkeit κ für Aluminium bei 100 °C. (6 Punkte)

Aufgabe 3:**(10 Punkte)**

An eine Autobatterie mit der Leerlaufspannung $U_0 = 12\text{V}$ und dem Innenwiderstand $R_i = 0,5\Omega$ wird über einen Transformator mit der primären Windungszahl N_1 und der sekundären Windungszahl N_2 ein Lastwiderstand $R_L = 120\Omega$ angeschlossen.

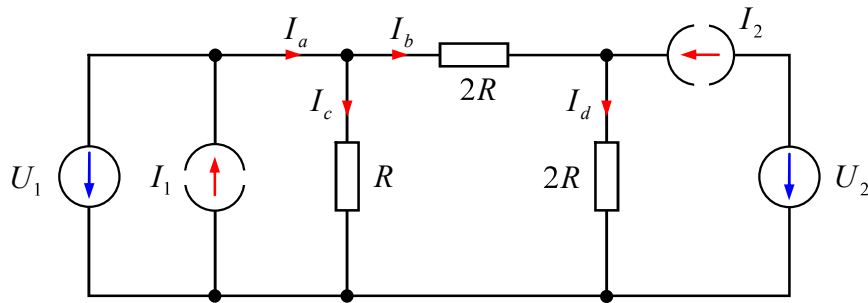


- Stellen Sie die Maschengleichungen zur Beschreibung dieser Anordnung auf. Tragen Sie die verwendeten Bezeichnungen für Ströme und gegebenenfalls weitere Spannungen in das Bild ein. (6 Punkte)
- Welche Leistung gibt die Batterie ab? (3 Punkte)
- Welche Leistung nimmt der Lastwiderstand auf? (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 6:**(16 Punkte)**

Gegeben sei das unten dargestellte Netzwerk. Es wird von den idealen Spannungsquellen U_1 und U_2 sowie den idealen Stromquellen I_1 und I_2 gespeist.



- a) Berechnen Sie die Ströme I_a , I_b , I_c und I_d mithilfe des Überlagerungssatzes in Abhängigkeit von den Quellen U_1 , U_2 , I_1 , I_2 . (6 Punkte)

Es gelten jetzt folgende Daten: $U_1 = 4\text{ V}$, $U_2 = 10\text{ V}$, $I_1 = 10\text{ A}$, $I_2 = 2\text{ A}$ und $R = 5\ \Omega$.

- b) Berechnen Sie die Werte der Ströme I_a , I_b , I_c und I_d sowie die gesamte von den Widerständen aufgenommene Leistung P_R . (5 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Leistungsaufnahme bzw. -abgabe für alle Quellen. Entscheiden Sie für jede Quelle, ob sie Leistung aufnimmt oder abgibt. Stellen Sie die Leistungsbilanz des gesamten Netzwerks auf. (5 Punkte)

Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 28. September 2010	

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:**(20 Punkte)**

- a) Eine geladene Metallkugel mit der Ladung Q erzeugt in ihrem Außenraum das gleiche Feld wie eine Punktladung Q im Mittelpunkt der Metallkugel (vgl. Kap. 1.12).

Elektrisches Feld \vec{E}_1 infolge der linken Metallkugel auf der x-Achse im Intervall

$$r_1 < x < a - r_2: \vec{E}_1 \stackrel{(1.3)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x$$

Elektrisches Feld \vec{E}_2 infolge der rechten Metallkugel auf der x-Achse im Intervall

$$r_1 < x < a - r_2: \vec{E}_2 = -\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (a-x)^2} \vec{e}_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (a-x)^2} \vec{e}_x$$

Überlagerung der beiden Beiträge: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(a-x)^2} \right] \vec{e}_x$

b) $U_{12} \stackrel{(1.30)}{=} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ $d\vec{s} = \vec{e}_x dx$

P_1 : Punkt bei $x = r_1$

P_2 : Punkt bei $x = a - r_2$

$$U_{12} = \int_{r_1}^{a-r_2} \vec{E} \cdot \vec{e}_x dx = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right]_{r_1}^{a-r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a-r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{a-r_1} \right)$$

$$U_{12} \stackrel{a \gg r_1, a \gg r_2}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{2}{a} \right)$$

(Angabe nicht erforderlich)

c) $\vec{F} = \vec{e}_x \frac{Q(-Q)}{4\pi\epsilon_0 a^2} = -\vec{e}_x \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}$

- d) Wenn die rechte Kugel von der Position bei $x = a$ zur Position $x = 2a$ verschoben werden soll, dann gilt mit Gl. (1.20)

$$W_e = - \int_a^{2a} \left(-\vec{e}_x \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) \cdot \vec{e}_x dx = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{2a} \frac{1}{x^2} dx = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{2a} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Oder bei Gl. (1.26) $Q_1 = -Q$, $r_2 = 2a$ und $r_1 = a$ einsetzen.

Aufgabe 2:**(15 Punkte)**

a) $\vec{J}_1 = -\vec{e}_y \frac{I}{A} \quad \vec{J}_2 = \vec{e}_x \frac{I}{A}$

b) $\vec{E}_1 = \frac{\vec{J}_1}{\kappa_1} = -\vec{e}_y \frac{I}{A\kappa_1} \quad \vec{E}_2 = \frac{\vec{J}_2}{\kappa_2} = \vec{e}_x \frac{I}{A\kappa_2}$

c) $U = \int \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = \int -\vec{e}_y \frac{I}{A\kappa_1} \cdot d\vec{s}_1 + \int \vec{e}_x \frac{I}{A\kappa_2} \cdot d\vec{s}_2 = \frac{I}{A} \left(\frac{l_1}{\kappa_1} + \frac{l_2}{\kappa_2} \right)$

d) $R = \frac{U}{I} = \frac{l_1}{\kappa_1 A} + \frac{l_2}{\kappa_2 A}$ Reihenschaltung zweier Widerstände.

e) $\rho_R(T) = \rho_{R,20^\circ\text{C}} [1 + \alpha(T - 20^\circ\text{C})]$

Spezifischer Widerstand von Aluminium bei 20°C : $\rho_{R,20^\circ\text{C}} = 0,0287 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$

Temperaturkoeffizient von Aluminium: $\alpha = 3,8 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

$\rho_R(100^\circ\text{C}) = 0,0287 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}} [1 + 3,8 \cdot 10^{-3} \frac{1}{^\circ\text{C}} 80^\circ\text{C}] = 0,0374 \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$

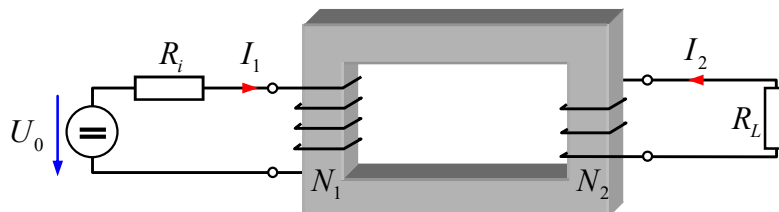
Daraus ergibt sich die spezifische Leitfähigkeit von Aluminium bei 100°C zu:

$\kappa(100^\circ\text{C}) = \frac{1}{\rho_R(100^\circ\text{C})} = 26,72 \frac{\text{m}}{\Omega\text{mm}^2}$

Aufgabe 3:**(10 Punkte)**

a) Gl. (6.81): $U_0 = R_i I_1 + L_{11} \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt}$
 $0 = R_L I_2 \pm M \frac{dI_1}{dt} + L_{22} \frac{dI_2}{dt}$

Die Ströme sind zeitlich konstant $\rightarrow \frac{d}{dt} = 0 \rightarrow U_0 = R_i I_1$ und $0 = R_L I_2$



b) Batterieleistung $P = U_0 I_1 = \frac{U_0^2}{R_i} = 288 \text{ W}$

c) Leistung am Lastwiderstand $P_L = 0 \text{ W}$

Aufgabe 4:**(19 Punkte)**

a) Linke Platte: $\vec{J} = \vec{e}_y \frac{I_0}{(b-a)l}$

Rechte Platte: $\vec{J} = -\vec{e}_y \frac{I_0}{(b-a)l}$

b) Rechtshändig umschlossener Strom: $I(x_1) = I_0$

c) Oersted'sches Gesetz: $\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_0$,

nur der Abschnitt bei x_1 liefert einen Beitrag (s. Hinweis)

$$H(x) \vec{e}_z \cdot l (-\vec{e}_z) = I_0 \rightarrow \vec{H} = -\frac{I_0}{l} \vec{e}_z$$

d) Rechtshändig umschlossener Strom:

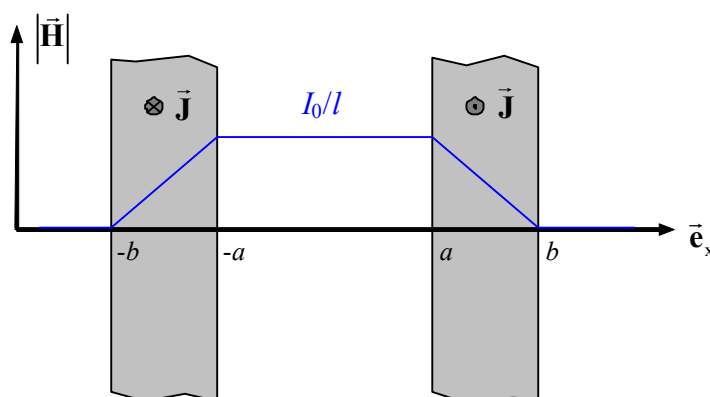
$$I(x_2) = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_{x_2=0}^b \int_0^l \frac{-I_0}{(b-a)l} \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y dx dz = -I_0 \frac{b-x_2}{b-a}$$

e) Oersted'sches Gesetz: $\oint_{C_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I(x)$

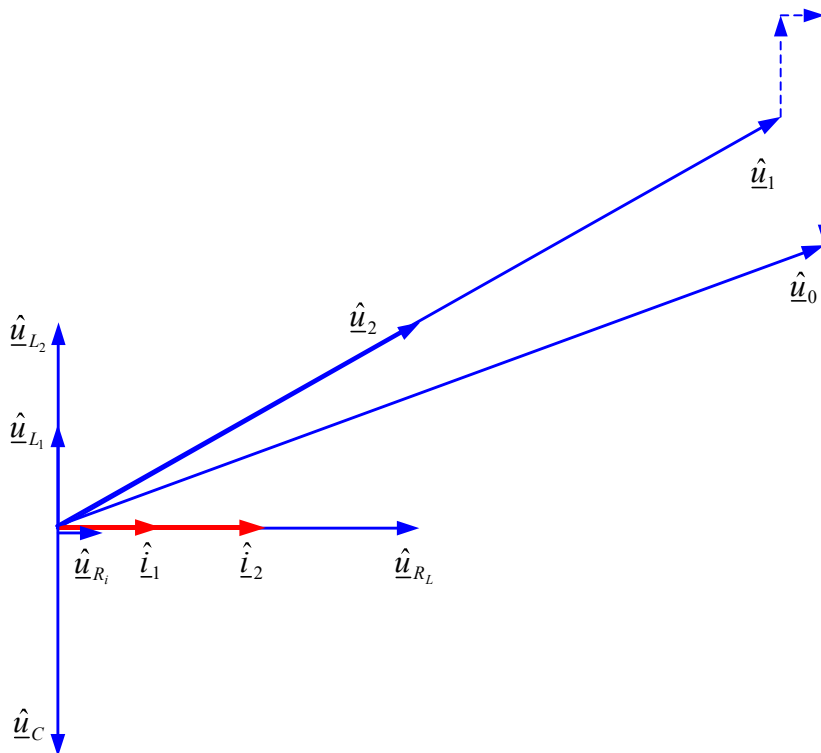
$$H(x) \vec{e}_z \cdot l \vec{e}_z = I(x) \rightarrow \vec{H} = \frac{I(x)}{l} \vec{e}_z = -\frac{I_0}{l} \frac{b-x}{b-a} \vec{e}_z$$

f) Linke Platte analog: $\vec{H} = -\frac{I_0}{l} \frac{b+x}{b-a} \vec{e}_z$

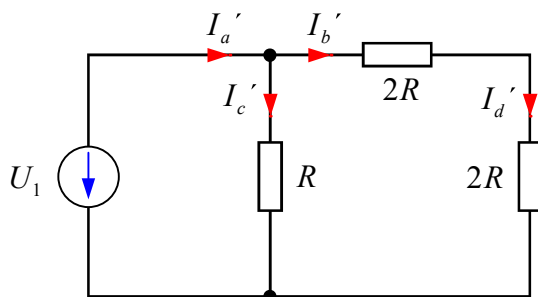
g) Betrag der magnetischen Feldstärke:



h) $W_m = \int_{-l}^l \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{1}{2} \mu_0 |\vec{H}|^2 dx dy dz = \frac{1}{2} \mu_0 \left(-\frac{I_0}{l} \right)^2 \cdot 2l \cdot 2a \cdot 2a = \mu_0 I_0^2 \frac{4a^2}{l}$

**Aufgabe 6:****(16 Punkte)**

- a) Betrachtung von U_1 : Restliche Stromquellen werden ersetzt durch einen Leerlauf und restliche Spannungsquellen werden ersetzt durch einen Kurzschluss.

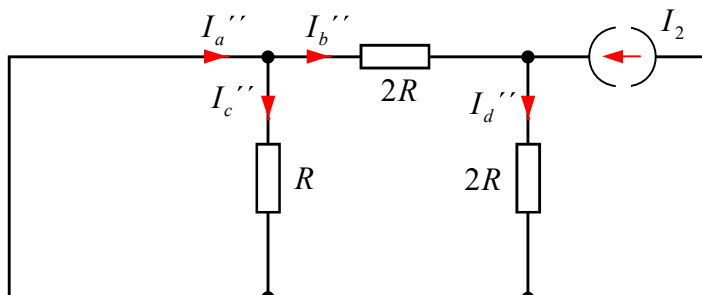


$$I_b' = I_d' = \frac{U_1}{4R},$$

$$I_c' = \frac{U_1}{R},$$

$$I_a' = I_b' + I_c' = \frac{U_1}{R} + \frac{U_1}{4R} = \frac{5U_1}{4R}$$

Betrachtung von I_2 : Restliche Stromquellen werden ersetzt durch einen Leerlauf und restliche Spannungsquellen werden ersetzt durch einen Kurzschluss.



Der Widerstand R wird durch den Kurzschluss überbrückt, d.h. durch ihn fließt kein Strom. Der Strom I_2 teilt sich gleichmäßig auf die beiden Widerstände der Größe $2R$ auf. Unter Berücksichtigung der eingezeichneten Stromrichtungen gilt somit:

$$I_a'' = I_b'' = -\frac{I_2}{2}, \quad I_c'' = 0, \quad I_d'' = \frac{I_2}{2}.$$

Wird nur die Quelle I_1 betrachtet und dabei die Spannungsquelle U_1 durch einen Kurzschluss ersetzt, dann sieht man sofort, dass I_1 kurzgeschlossen wird und somit keinen Beitrag zu den Strömen I_a , I_b , I_c und I_d liefert.

Ähnliches gilt auch für die Beiträge der Quelle U_2 . Indem I_2 durch einen Leerlauf ersetzt wird ist keine leitende Verbindung zwischen U_2 und dem Rest der Schaltung mehr vorhanden. Durch Überlagerung ergibt sich also:

$$I_a = \frac{5U_1}{4R} - \frac{I_2}{2}, \quad I_b = \frac{U_1}{4R} - \frac{I_2}{2}, \quad I_c = \frac{U_1}{R}, \quad I_d = \frac{U_1}{4R} + \frac{I_2}{2}.$$

b) $I_a = 1A - 1A = 0A$, $I_b = 0,2A - 1A = -0,8A$, $I_c = 0,8A$, $I_d = 0,2A + 1A = 1,2A$
 $P_R = I_b^2 2R + I_c^2 R + I_d^2 2R = 6,4W + 3,2W + 14,4W = 24W$

c) Abgegebene Leistung der Quelle U_1 : $P_{U_1} = U_1(I_a - I_1)$
 mit Teilaufgabe a): $I_a = 1A - 1A = 0A \rightarrow P_{U_1} = 4V \cdot (-10A) = -40W$
 Die Spannungsquelle U_1 nimmt 40 W auf.

Abgegebene Leistung der Quelle I_1 : $P_{I_1} = U_1 I_1 = 4V \cdot 10A = 40W$

Die Stromquelle I_1 gibt 40 W ab.

Abgegebene Leistung der Quelle U_2 : $P_{U_2} = U_2 I_2 = 10V \cdot 2A = 20W$

Die Spannungsquelle U_2 gibt 20 W ab.

Abgegebene Leistung der Quelle I_2 : $P_{I_2} = (I_d \cdot 2R - U_2) \cdot I_2 = (12V - 10V) \cdot 2A = 4W$

Die Stromquelle I_2 gibt 4 W ab.

Leistungsbilanz:

Abgegebene Leistungen: $P_{I_1} + P_{I_2} + P_{U_2} = 40W + 4W + 20W = 64W$

Aufgenommene Leistungen: $P_R + P_{U_1} = 24W + 40W = 64W$