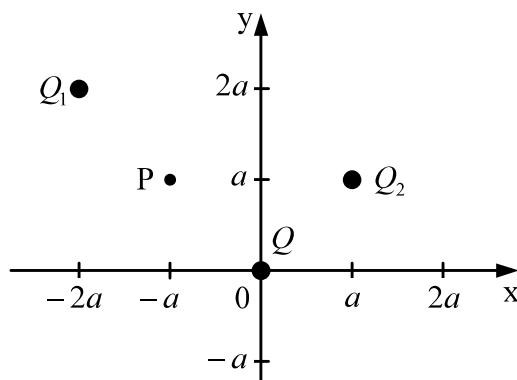


Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 28. September 2009	

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
6 Aufgaben

(100 Punkte)

Aufgabe 1:**(14 Punkte)**

Gegeben ist die aus drei Punktladungen bestehende Anordnung aus Abbildung 1. Die Punktladung Q liegt im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems.

Außerdem befinden sich:

Q_1 an der Stelle $x = -2a$, $y = 2a$

Q_2 an der Stelle $x = a$, $y = a$

P an der Stelle $x = -a$, $y = a$.

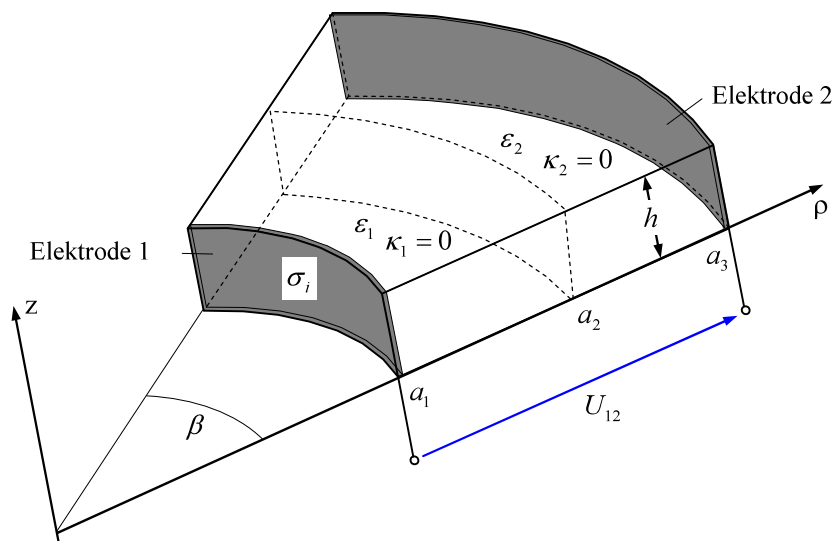
Abbildung 1: Anordnung aus drei Punktladungen

- a) Berechnen Sie die Kraft auf die Punktladung Q im Ursprung infolge der Punktladungen Q_1 und Q_2 . (6 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben existieren nur noch die Punktladungen Q und Q_1 .

- b) Welche Energie muss aufgewendet werden, um die Punktladung Q_1 ($x = -2a$, $y = 2a$) an die Stelle zu verschieben, an der vorher Q_2 lag ($x = a$, $y = a$)? (6 Punkte)
- c) Welche Energie muss aufgewendet werden, um die Punktladung Q_1 von ihrer ursprünglichen Position ($x = -2a$, $y = 2a$) an den Punkt P ($x = -a$, $y = a$) zu verschieben? (Begründung genügt, keine Rechnung erforderlich!) (2 Punkte)

Name:	Matrikelnummer:
-------	-----------------

Aufgabe 2:**(22 Punkte)****Abbildung 2:** Zylindersegment

In Abb. 2 ist ein Zylindersegment mit dem Winkel β und der Höhe h dargestellt. Das Segment ist konzentrisch um die z -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems (ρ, φ, z) angeordnet.

Das Segment ist im Bereich $a_1 \leq \rho < a_2$ mit Material der Dielektrizitätskonstanten ε_1 ausgefüllt, im Bereich $a_2 \leq \rho < a_3$ befindet sich Material mit der Dielektrizitätskonstanten ε_2 . An

die ideal leitfähigen Elektroden 1 und 2 aus Abb. 2 wird die Gleichspannung U_{12} mit der dargestellten Orientierung angelegt. Diese Elektroden überdecken die vordere und hintere Mantelfläche des Zylindersegments vollständig und es wird angenommen, dass der Außenbereich feldfrei ist.

Für die elektrische Flussdichte gilt der Ansatz $\vec{D} = D_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$.

Die sich einstellende Oberflächenladung σ_i auf der inneren Elektrode kann zunächst für die Teilaufgabe a) als bekannt angenommen werden.

- Drücken Sie die elektrische Flussdichte \vec{D} und die elektrische Feldstärke \vec{E} in Abhängigkeit der gegebenen Größen für die beiden dargestellten Bereiche aus. (6 Punkte)
- Setzen Sie Ihre gefundene Lösung in die an der Elektrode 1 gültigen Randbedingungen ein. (2 Punkte)
- Ermitteln Sie den Wert der Flächenladung σ_i in Abhängigkeit der angelegten Spannung U_{12} . (6 Punkte)
- Berechnen Sie die Kapazität der Anordnung. (2 Punkte)
- Berechnen Sie die im Bereich 1 gespeicherte Energie. (3 Punkte)
- Geben Sie ein elektrisches Ersatznetzwerk der Anordnung an. Wie ändert sich dieses Ersatznetzwerk, falls der Bereich 1 zusätzlich eine Leitfähigkeit $\kappa_1 \neq 0$ aufweist? Welche Feldstärke stellt sich in diesem Fall im Bereich 1 ein? (3 Punkte)

Aufgabe 3:**(13 Punkte)**

Gegeben sei das in Abbildung 3 dargestellte Netzwerk.

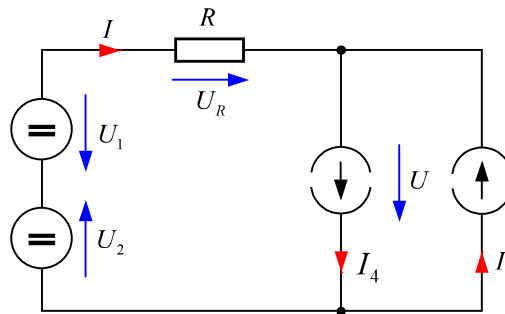


Abbildung 3: Netzwerk mit idealen Quellen

- Berechnen Sie den Strom I und die Spannung U in Abhängigkeit der gegebenen Größen. (4 Punkte)
- Berechnen Sie die Leistungsaufnahme bzw. -abgabe für jeden einzelnen Zweipol. Hierbei gelte $U_1 = 1 \text{ V}$, $U_2 = 2 \text{ V}$, $I_3 = 3 \text{ A}$, $I_4 = 4 \text{ A}$ und $R = 1 \Omega$. (5 Punkte)
- Entscheiden Sie für jeden Zweipol, ob dieser Leistung aufnimmt oder abgibt. Stellen Sie die Leistungsbilanz des Netzwerks auf. (4 Punkte)

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4:**(14 Punkte)**

Gegeben ist eine Leiterplatte (grau hinterlegter Bereich) mit parallel zur z -Achse verlaufenden Doppelleitungen. Die Länge l der Doppelleitungen sei sehr groß gegenüber den sonstigen Abmessungen a , b und h . Die dargestellte Anordnung kann damit als eben, d.h. unabhängig von der Koordinate z betrachtet werden.

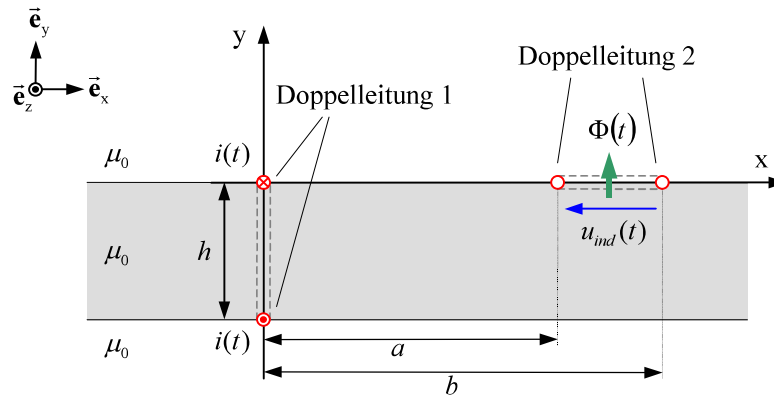


Abbildung 4: Leiterplatte mit zwei Doppelleitungen

Der Hinleiter von Doppelleitung 1 befindet sich auf der Oberseite der Leiterplatte, während der Rückleiter auf der Unterseite verläuft. Die Doppelleitung 1 wird in der gezeigten Richtung vom Strom $i(t)$ durchflossen. Sowohl der Hinleiter als auch der Rückleiter von Doppelleitung 2 verlaufen auf der Oberseite der Leiterplatte. Die Doppelleitung 2 sei stromlos.

Die Leiterplatte habe die Höhe h , die Doppelleitung 2 besitzt die eingezeichneten Entfernungen a und b von der yz -Ebene. Die Abmessungen der einzelnen Leiter können gegenüber den übrigen Abmessungen vernachlässigt werden.

- Bestimmen Sie den magnetischen Fluss $\Phi(t)$ durch die Doppelleitung 2 infolge des durch die Doppelleitung 1 fließenden Stromes $i(t)$. (10 Punkte)
- Geben Sie die Gegeninduktivität L_{21} zwischen Doppelleitung 1 und Doppelleitung 2 an. (2 Punkte)

Die Doppelleitung 1 werde nun vom Strom $i(t) = \hat{i}_0 \sin(\omega t)$ durchflossen.

- Berechnen Sie die zwischen den offenen Klemmen von Doppelleitung 2 induzierte Spannung $u_{ind}(t)$. (2 Punkte)

Aufgabe 6:**(18 Punkte)**

Gegeben ist ein aus unterschiedlichen Ferritmaterialien (linker Außenschenkel μ_1 , Mittelschenkel μ_2 und rechter Außenschenkel $\mu_3 \rightarrow \infty$) bestehender Kern, dessen Permeabilität μ_3 im rechten Außenschenkel als unendlich hoch angesehen werden kann. Alle drei Schenkel haben einen quadratischen Querschnitt mit der Querschnittsfläche $A = d^2$. Die effektive Weglänge der beiden Außenschenkel l_A sei bekannt, ebenso die effektive Weglänge l_M des Mittelschenkels. Aus dem rechten Außenschenkel wird ein Teil des Ferritmaterials entfernt, so dass ein Luftspalt der Länge l_G entsteht.

Auf dem Kern befinden sich zwei Wicklungen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 . Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte \vec{B} homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss im Luftspalt wird vernachlässigt, so dass für den Luftspalt der gleiche Querschnitt wie für den Außenschenkel angenommen werden kann.

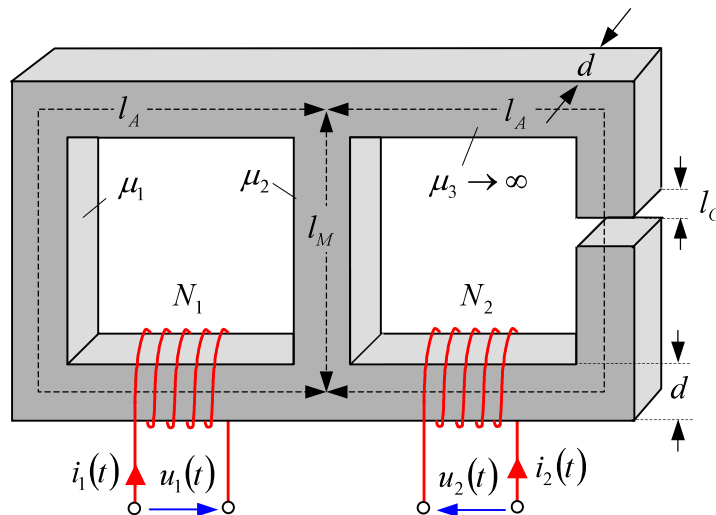


Abbildung 6: Permeabler Kern mit Luftspalt

- a) Geben Sie die magnetischen Widerstände R_{mL} und R_{mR} des linken und rechten Schenkels sowie R_{mM} des mittleren Schenkels an. (3 Punkte)

Für die folgenden Teilaufgaben gelte $l_G = 0$.

- b) Zeichnen Sie ein vollständiges magnetisches Ersatzschaltbild der Anordnung. Legen Sie hierfür rechtshändig orientierte Zählrichtungen für die magnetischen Flüsse $\Phi_L = \Phi_1$ und $\Phi_R = \Phi_2$ durch den linken und rechten Schenkel fest. Tragen Sie diese in das magnetische Ersatzschaltbild ein. Berechnen Sie die beiden Flüsse in Abhängigkeit der Ströme i_1 und i_2 . (5 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} sowie die Gegeninduktivität M der beiden Wicklungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen. (4 Punkte)
- d) Wie groß ist der Koppelfaktor der Anordnung? (2 Punkte)
- e) Werten Sie das Faradaysche Induktionsgesetz für die beiden Wicklungen aus. Die ohmschen Widerstände der beiden Wicklungen sind hierbei zu vernachlässigen (4 Punkte)

Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 28. September 2009	

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:**(14 Punkte)**

- a) Zunächst wird die Feldstärke im Ursprung infolge von Q_1 und Q_2 berechnet:

$$Q_1: \vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a\vec{e}_x - 2a\vec{e}_y}{\sqrt{8a^2}^3}$$

$$Q_2: \vec{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-a\vec{e}_x - a\vec{e}_y}{\sqrt{2a^2}^3}$$

Dann kann die Kraft auf Q angegeben werden:

$$\vec{F} = Q(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(Q_1 \frac{2a(\vec{e}_x - \vec{e}_y)}{\sqrt{8a^2}^3} + Q_2 \frac{-a(\vec{e}_x + \vec{e}_y)}{\sqrt{2a^2}^3} \right)$$

$$\vec{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(Q_1 \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{8\sqrt{2}a^2} - Q_2 \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{2\sqrt{2}a^2} \right)$$

- b) Die gesuchte Energie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} W_e &= -Q_1 \int_{P_{Q_1}}^{P_{Q_2}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Q_1 \int_{r_{Q_1}}^{r_{Q_2}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = -\frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_{Q_1}}^{r_{Q_2}} = -\frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r_{Q_2}} - \left(-\frac{1}{r_{Q_1}} \right) \right] \\ &= -\frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{2a\sqrt{2}} - \frac{1}{a\sqrt{2}} \right) = \frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg:

Energie an der neuen Position minus Energie an der alten Position, mit Gl. (1.27)

$$W_e = Q_1 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2a^2}} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{8a^2}} \right) = \frac{QQ_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2a\sqrt{2}}$$

- c) Das Feld der Punktladung Q im Ursprung ist radialsymmetrisch. Somit liegen die Punkte $P(x = -a, y = a)$ und $P_{Q_2}(x = a, y = a)$ auf einer Äquipotentialfläche. Die benötigte Energie ist die gleiche wie bei Teilaufgabe b).

Aufgabe 2:**(22 Punkte)**

- a) Das Hüllflächenintegral der elektrischen Flussdichte entspricht im elektrostatischen Fall der eingeschlossenen Ladung. Darüber hinaus muss die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte an der Grenze zwischen Bereich 1 und 2 stetig sein, womit für die Flussdichte in beiden Teilbereichen gilt

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q$$

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\varphi=0}^{\beta} \int_{z=0}^h \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{\varphi=0}^{\beta} \int_{z=0}^h D_{\rho}(\rho) \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} \rho \, dz \, d\varphi = D_{\rho}(\rho) \rho h \beta$$

$$Q = \iint_{A_i} \sigma_i \, dA = \sigma_i a_1 h \beta$$

$$\rightarrow D_{\rho}(\rho) \rho h \beta = \sigma_i a_1 h \beta \quad \rightarrow \quad D_{\rho}(\rho) = \frac{a_1}{\rho} \sigma_i$$

Für die elektrische Feldstärke folgt unter Beachtung der unterschiedlichen Permeabilität der beiden Teilbereiche

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \rightarrow \quad E_{\rho}(\rho) = \begin{cases} \frac{D_{\rho}(\rho)}{\epsilon_1} = \frac{a_1}{\epsilon_1} \sigma_i \frac{1}{\rho} & \text{für } a_1 \leq \rho < a_2 \\ \frac{D_{\rho}(\rho)}{\epsilon_2} = \frac{a_1}{\epsilon_2} \sigma_i \frac{1}{\rho} & \text{für } a_2 \leq \rho < a_3 \end{cases}$$

- b) Die Auswertung der Randbedingung für die innere Elektrodenfläche liefert unter der Annahme eines feldfreien Außenraumes für die Normalkomponente mit $\vec{D}_{\text{außen}} = 0$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{D} - \underbrace{\vec{D}_{\text{außen}}}_{=0} \right) \Big|_{\rho=a_1} \stackrel{!}{=} \sigma_i \quad \rightarrow \quad \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{D}(a_1) = D_{\rho}(a_1) \stackrel{!}{=} \sigma_i \quad \checkmark$$

Die in Teilaufgabe a) gefundene Lösung liefert für $\rho = a_1$ dasselbe Ergebnis. Die Randbedingung für die Tangentialkomponente liefert

$$\vec{e}_{\varphi} \cdot \left(\vec{E} - \underbrace{\vec{E}_{\text{außen}}}_{=0} \right) \Big|_{\rho=a_1} \stackrel{!}{=} 0 \quad \checkmark$$

Der Ansatz enthält nur eine Normalkomponente.

- c) Das Umlaufintegral der elektrischen Feldstärke verschwindet im elektrostatischen Fall:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \int_{a_1}^{a_2} E_1(\rho) \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} d\rho + \int_{a_2}^{a_3} E_2(\rho) \vec{e}_{\rho} \cdot \vec{e}_{\rho} d\rho - U_{12} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{a_1}{\epsilon_1} \sigma_i \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{a_1}{\epsilon_2} \sigma_i \int_{a_2}^{a_3} \frac{1}{\rho} d\rho = \frac{a_1}{\epsilon_1} \sigma_i \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{a_1}{\epsilon_2} \sigma_i \ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right) \stackrel{!}{=} U_{12}$$

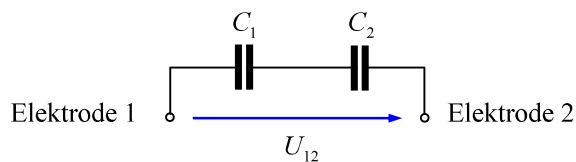
$$\rightarrow \sigma_i = \frac{U_{12}}{a_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)}$$

$$d) \quad C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma_i a_1 h \beta}{U_{12}} \quad \rightarrow \quad C = \frac{h \beta}{\frac{1}{\varepsilon_1} \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2} \ln\left(\frac{a_3}{a_2}\right)}$$

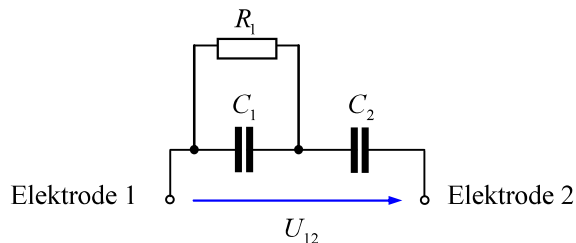
- e) Die im Bereich 1 gespeicherte Energie erhält man durch Integration der Energiedichte in diesem Teilbereich:

$$\begin{aligned} W_1 &= \iiint_{V_1} \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} dV = \iiint_V \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{\varepsilon_1} \sigma_i^2 \frac{1}{\rho^2} \rho d\rho d\varphi dz = \frac{a_1^2}{2\varepsilon_1} \sigma_i^2 \int_{z=0}^h \int_{\varphi=0}^{\beta} \int_{\rho=a_1}^{a_2} \frac{1}{\rho} d\rho d\varphi dz = \\ &= \frac{a_1^2}{2\varepsilon_1} \sigma_i^2 h \beta \ln\left(\frac{a_2}{a_1}\right) \end{aligned}$$

- f) Die dargestellte Anordnung entspricht der Serienschaltung zweier Kapazitäten:



Falls der Bereich 1 zusätzlich eine Leitfähigkeit aufweist, so ist dieses Ersatzschaltbild um einen Parallelwiderstand zu erweitern:



Bei Anlegen einer Gleichspannung fällt diese komplett am Kondensator C_2 ab, weshalb der Bereich 1 dann feldfrei ist

Aufgabe 3:**(13 Punkte)**

a) Maschenumlauf: $U_2 - U_1 + IR + U = 0 \rightarrow U = U_1 - U_2 - IR$
 Knotengleichung: $I + I_3 = I_4 \rightarrow I = I_4 - I_3$
 $\rightarrow U = U_1 - U_2 - R(I_4 - I_3)$

b) $I = 1\text{ A}, \quad U = (1 - 2 - 1)\text{ V} = -2\text{ V}$

Für die Quellen gilt mit dem Generatorzählfeilsystem:

$$P_1 = U_1 I = 1\text{ V} \cdot 1\text{ A} = 1\text{ W}$$

$$P_2 = -U_2 I = -2\text{ V} \cdot 1\text{ A} = -2\text{ W}$$

$$P_3 = UI_3 = -2\text{ V} \cdot 3\text{ A} = -6\text{ W}$$

$$P_4 = U \cdot (-I_4) = -2\text{ V} \cdot (-4\text{ A}) = 8\text{ W}$$

Für den Widerstand gilt mit dem Verbraucherzählfeilsystem

$$P_R = I^2 R = 1\text{ A}^2 \cdot 1\Omega = 1\text{ W}$$

c) Generatorzählfeilsystem:

$$P_1 = 1\text{ W} > 0 \rightarrow U_1 \text{ gibt Leistung ab}$$

$$P_2 = -2\text{ W} < 0 \rightarrow U_2 \text{ nimmt Leistung auf}$$

$$P_3 = -6\text{ W} < 0 \rightarrow I_3 \text{ nimmt Leistung auf}$$

$$P_4 = 8\text{ W} > 0 \rightarrow I_4 \text{ gibt Leistung ab}$$

Verbraucherzählfeilsystem:

$$P_R = 1\text{ W} > 0 \rightarrow \text{Widerstand kann nur Leistung aufnehmen}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{in} = P_1 + P_4 = 9\text{ W} \\ P_{out} = |P_2| + |P_3| + P_R = 9\text{ W} \end{array} \right\} \rightarrow P_{in} = P_{out}$$

Aufgabe 4:**(14 Punkte)**

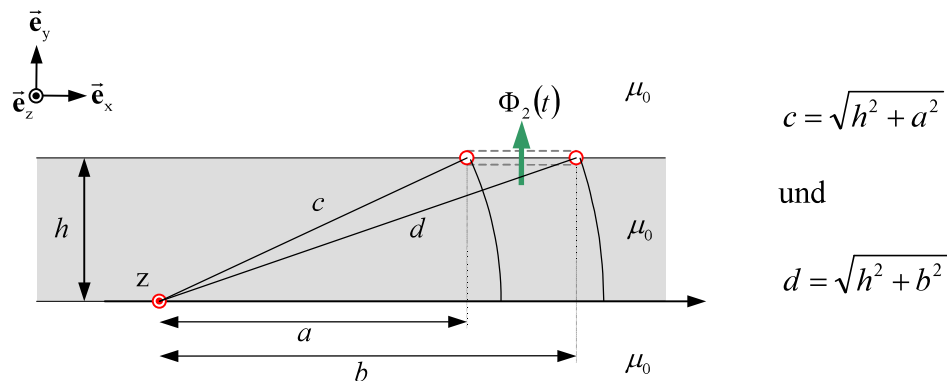
- a) Der Gesamtfluss setzt sich zusammen aus der Überlagerung der beiden Teilflüsse infolge der beiden Leiter von Doppelleitung 1.

Fluss $\Phi_1(t)$ infolge des unendlich langen Linienleiters im Ursprung des Zylinderkoordinatensystems:

$$\vec{H}_1 = -\frac{i(t)}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \quad \text{bzw.} \quad \vec{B}_1 = -\mu_0 \frac{i(t)}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi$$

$$\Phi_1(t) = \iint_{A_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = -\mu_0 \int_{z=0}^l \int_{\rho=a}^b \frac{i(t)}{2\pi\rho} \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_\phi d\rho dz = -\mu_0 l \frac{i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Für den 2. Leiter der Doppelleitung 1 ergibt sich ein identisches Vorgehen. Wird das Koordinatensystem so verschoben, dass der 2. Leiter jetzt im Ursprung liegt, dann gilt mit den in der folgenden Abbildung definierten Abstände c und d :



$$\Phi_2(t) = \mu_0 l \frac{i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{c}\right) = \mu_0 l \frac{i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{h^2 + b^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}}\right)$$

Für den Gesamtfluss gilt:

$$\Phi_{21}(t) = \Phi_1(t) + \Phi_2(t) = \mu_0 l \frac{i(t)}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{d}{c}\right) - \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = \mu_0 l \frac{i(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)$$

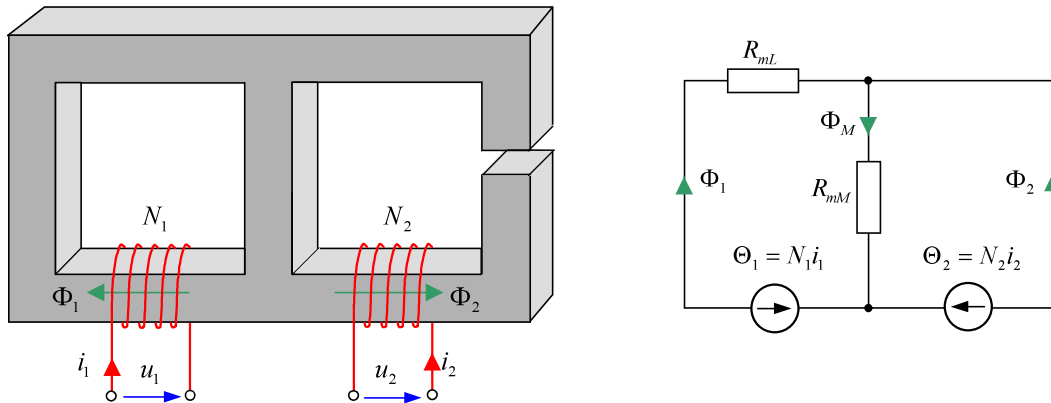
- b) Gegeninduktivität: $L_{21} = \frac{\Phi_{21}(t)}{i(t)} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)$
- c) Bemerkung: Das Vorzeichen ist wegen der nur zweidimensionalen Darstellung nicht eindeutig.

$$u_{ind}(t) = \pm \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad u_{ind}(t) = \pm \frac{\mu_0 l}{2\pi} \hat{i}_0 \omega \ln\left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right) \cos(\omega t)$$

Aufgabe 6:**(18 Punkte)**

$$a) \quad R_{mL} = \frac{l_A}{\mu_1 d^2}, \quad R_{mM} = \frac{l_M}{\mu_2 d^2}, \quad R_{mR} = \frac{l_G}{\mu_0 d^2}$$

- b) Für $l_G = 0$ und $\mu_3 \rightarrow \infty$ verschwindet der magnetische Widerstand im rechten Außenschenkel und man erhält den folgenden magnetischen Kreis



Der Fluss im Mittelschenkel ergibt sich zu $\Phi_M = \Phi_1 + \Phi_2$

Der linke Maschenumlauf liefert $-N_1 i_1 + \Phi_1 R_{mL} + R_{mM}(\Phi_1 + \Phi_2) = 0$ (1)

Der rechte Maschenumlauf liefert $-N_2 i_2 + R_{mM}(\Phi_1 + \Phi_2) = 0$ (2)

$$\text{Gl. (1) - Gl. (2):} \quad -N_1 i_1 + \Phi_1 R_{mL} + N_2 i_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Phi_1 = \frac{1}{R_{mL}}(N_1 i_1 - N_2 i_2)$$

$$\text{Aus Gl. (2) folgt} \quad \Phi_2 = \frac{N_2 i_2}{R_{mM}} - \Phi_1 = \frac{N_2 i_2}{R_{mM}} - \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{R_{mL}} = -\frac{N_1 i_1}{R_{mL}} + \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}} N_2 i_2$$

- c) Für die Selbstinduktivitäten erhält man

$$L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{N_1 \Phi_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{N_1^2}{R_{mL}}$$

$$L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{N_2 \Phi_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} = N_2^2 \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}}$$

Für die Gegeninduktivität erhält man

$$M = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{N_2 \Phi_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} \Big|_{i_1=0} = \frac{N_1 \Phi_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} = -\frac{N_1 N_2}{R_{mL}}$$

$$d) \quad \text{Gl. (6.48):} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} = \frac{-\frac{N_1 N_2}{R_{mL}}}{\sqrt{\frac{N_1^2}{R_{mL}} N_2^2 \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}}}} = -\sqrt{\frac{R_{mM}}{R_{mL} + R_{mM}}}$$

- e) Das Induktionsgesetz liefert für die Wicklung 1 mit der Kontur C_1 in Richtung des Stromes i_1

$$\oint_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u_1 = -\frac{d\Phi_{11}}{dt} = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$$

$$u_1 = N_1 \frac{1}{R_{mL}} \frac{d}{dt} (N_1 i_1 - N_2 i_2) = \underbrace{\frac{N_1^2}{R_{mL}}}_{L_{11}} \frac{di_1}{dt} + \underbrace{\left(-\frac{N_1 N_2}{R_{mL}} \right)}_M \frac{di_2}{dt}$$

Das Induktionsgesetz liefert für die Wicklung 2 mit der Kontur C_2 in Richtung des Stromes i_2

$$\oint_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -u_2 = -\frac{d\Phi_{22}}{dt} = -N_2 \frac{d\Phi_2}{dt}$$

$$u_2 = N_2 \frac{d}{dt} \left(-\frac{N_1 i_1}{R_{mL}} + \frac{R_{mL} + R_{mM}}{R_{mL} R_{mM}} N_2 i_2 \right) = -\underbrace{\frac{N_1 N_2}{R_{mL}}}_M \frac{di_1}{dt} + \underbrace{\frac{N_2^2 (R_{mL} + R_{mM})}{R_{mL} R_{mM}}}_{L_{22}} \frac{di_2}{dt}$$