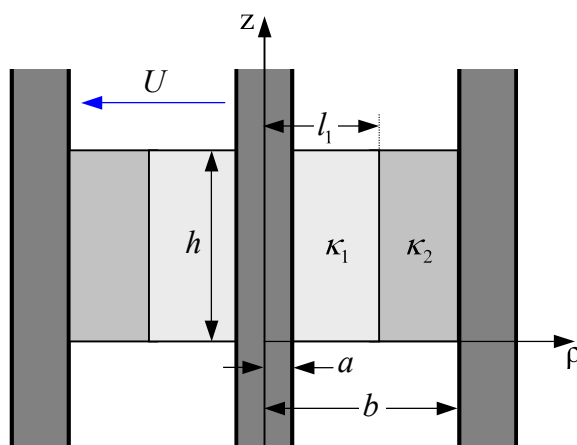


Bearbeitungszeit: 120 Minuten

7 Aufgaben

(100 Punkte)

Aufgabe 1:**(17 Punkte)**

Um die z -Achse eines zylindrischen Koordinatensystems (ρ, φ, z) ist ein Koaxialleiter mit den Abmessungen a (Radius des Innenleiters) und b (Innenradius des Außenleiters) konzentrisch angeordnet. Auf einem Abschnitt der Länge h sind die Bereiche $a < \rho < l_1$ und $l_1 < \rho < b$ mit Widerstandsmaterialien der Leitfähigkeiten κ_1 und κ_2 ausgefüllt.

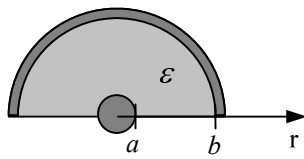
Innen- und Außenleiter sind unendlich gut leitfähig. Aufgrund der Spannung U mit der im Bild angegebenen Orientierung

fließt der Gesamtstrom I vom Innenleiter durch die beiden Widerstandsmaterialien zu dem Außenleiter. Für die Stromdichte \vec{J} in diesen beiden Bereichen gilt jeweils der Ansatz $\vec{J} = J_\rho(\rho) \vec{e}_\rho$.

- Berechnen Sie die Stromdichte \vec{J} in den beiden Widerstandsmaterialien in Abhängigkeit des Stromes I . (4 Punkte)
- Drücken Sie die elektrische Feldstärke \vec{E} in den beiden Widerstandsmaterialien durch die Stromdichte \vec{J} aus. (4 Punkte)
- Ermitteln Sie die Spannung U in Abhängigkeit des Gesamtstroms I . (4 Punkte)
- Berechnen Sie den Gesamtwiderstand R der Anordnung. (2 Punkte)
- Welche Leistung wird in den beiden Widerstandsmaterialien in Wärme umgesetzt? Welcher Anteil fällt im Widerstandsmaterial 1, welcher Anteil im Widerstandsmaterial 2 an? (3 Punkte)

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2:**(14 Punkte)**

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Querschnitt durch eine Anordnung, in der sich eine halbkugelförmige Metallfläche mit dem Innenradius b über einer metallischen Kugel mit dem Radius a befindet. Der Innenbereich $a < r < b$ ist mit einem Dielektrikum $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ ausgefüllt. Die Metallkugel besitzt die Gesamtladung Q , die obere Metallfläche die Ladung $-Q$. Es wird angenommen, dass der Außenbereich feldfrei ist.

- Berechnen Sie die Flächenladungsdichte σ auf der gesamten inneren Metallkugel. (2 Punkte)
- Geben Sie die Feldstärke im kompletten oberen Halbraum ($0 < \vartheta < \pi/2$) an. (5 Punkte)
- Welche Spannung U stellt sich zwischen der inneren Metallkugel und der äußeren Elektrode ein? (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Kapazität der Anordnung. (2 Punkte)
- Die beiden Elektroden werden nun mit einem Widerstand R miteinander verbunden. Welche Energie wird in dem Widerstand umgesetzt? (2 Punkte)

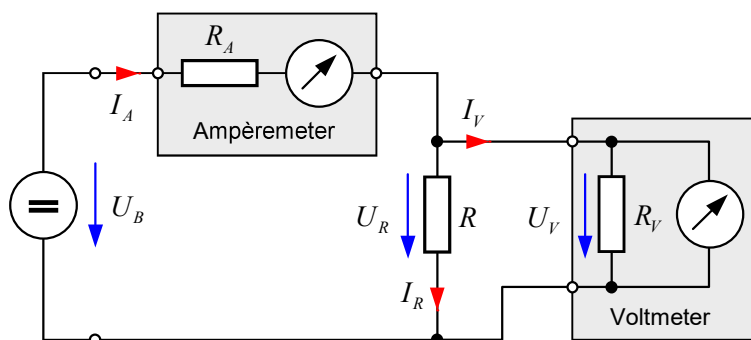
Aufgabe 3:**(10 Punkte)**

Gegeben ist die im Bild dargestellte Messanordnung zur Bestimmung des Widerstandes R . Folgende Daten sind bekannt:

Batteriespannung $U_B = 100 \text{ V}$

Widerstände der Messgeräte: $R_A = 1 \Omega$, $R_V = 10 \text{ k}\Omega$

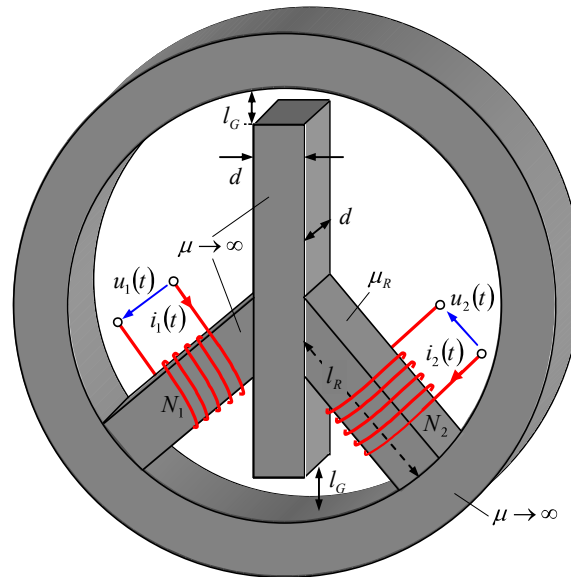
Das Voltmeter zeigt eine Spannung $U_V = 99 \text{ V}$.



- Welcher Wert ergibt sich für R , falls das Voltmeter als ideal angenommen wird, d.h. für $R_V \rightarrow \infty$? (4 Punkte)
- Welcher Wert ergibt sich für R , falls der Widerstand des Voltmeters R_V berücksichtigt wird? (6 Punkte)

Aufgabe 4:**(18 Punkte)**

Gegeben ist ein aus unterschiedlichen Ferritmaterialien bestehender Kern, auf dem sich zwei Wicklungen mit den Windungszahlen N_1 und N_2 befinden. Alle Schenkel haben einen quadratischen Querschnitt mit der Querschnittsfläche $A = d^2$. Der mit den Windungen N_2 bewickelte Schenkel weist eine Permeabilität von $\mu_R = \mu_r \mu_0$ sowie eine bekannte effektive Weglänge von l_R auf, alle übrigen Schenkel können als hochpermeabel ($\mu \rightarrow \infty$) angenommen werden. Aus dem Mittelschenkel werden Teile des Ferritmaterials entfernt, so dass zwei Luftspalte mit jeweils der Länge l_G entstehen.



Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die magnetische Flussdichte \vec{B} homogen über den Kernquerschnitt verteilt ist. Der Streufluss im Luftspalt wird vernachlässigt, so dass für den Luftspalt der gleiche Querschnitt wie für den Mittelschenkel angenommen werden kann.

- Zeichnen Sie ein vollständiges magnetisches Ersatzschaltbild der Anordnung. Legen Sie hierfür rechtshändig orientierte Zählrichtungen für die magnetischen Flüsse Φ_1 und Φ_2 durch den linken und rechten Schenkel fest. Tragen Sie diese in das magnetische Ersatzschaltbild ein. Berechnen Sie die beiden Flüsse in Abhängigkeit der Ströme i_1 und i_2 . (10 Punkte)
- Berechnen Sie die Selbstinduktivitäten L_{11} und L_{22} sowie die Gegeninduktivität M der beiden Wicklungen in Abhängigkeit der gegebenen Größen. (4 Punkte)
- Wie groß ist der Koppelfaktor der Anordnung? Welche Sonderfälle in Hinblick auf die Verkopplung der beiden Wicklungen ergeben sich für $l_G \rightarrow 0$ und für $\mu_R \rightarrow \infty$? Begründen Sie Ihre Aussagen. (4 Punkte)

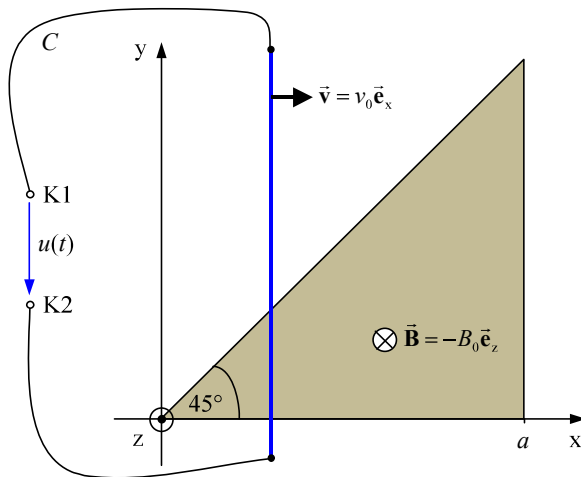
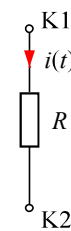
Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6:**(15 Punkte)**

Gegeben ist die Anordnung nach Abbildung a) im kartesischen Koordinatensystem. Im Bereich von $x = 0 \dots a$ schließt die x-Achse mit der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten einen Bereich konstanter magnetischer Flussdichte B_0 ein. Die Orientierung ist in negativer z-Richtung.

Ein y-gerichteter dünner metallischer Stab wird mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 in positiver x-Richtung über die xy-Ebene bewegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Stab bei $x = 0$. Beschleunigungseffekte werden vernachlässigt. Die Zuleitungen zum Stab befinden sich immer außerhalb des Bereichs mit der konstanten magnetischen Flussdichte.

**Abbildung a)** Vorderansicht der Anordnung für $t > 0$ **Abbildung b)**

Zunächst wird nur Abbildung a) betrachtet.

- Berechnen Sie den Zeitverlauf des magnetischen Flusses $\Phi(t)$ durch die von der Kontur C (Messleitungen und Stab) aufgespannte Fläche in negativer z-Richtung. Betrachten Sie dabei den Zeitraum $0 < t < a/v_0$. (4 Punkte)
- Wie groß ist die Spannung $u(t)$ im Zeitraum $0 < t < a/v_0$? (2 Punkte)

Nun wird der ohmsche Widerstand aus Abbildung b) an die Klemmen K1 und K2 in Abbildung a) angeschlossen. Die Induktivität und die ohmschen Widerstände von Stab und Zuleitungen sind zu vernachlässigen.

- Wie groß ist der Strom $i(t)$ im Zeitraum $0 < t < a/v_0$? (Stromrichtung beachten) (2 Punkte)
- Bestimmen Sie die Kraft \vec{F} , damit sich der Stab mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. (3 Punkte)
- Welche zeitabhängige Leistung $p(t)$ wird im Widerstand umgesetzt? (2 Punkte)
- Im Widerstand wird elektrische Leistung in Wärme umgesetzt. Woher kommt diese elektrische Energie? (2 Punkte)

Lehrstuhl für Elektromagnetische Felder	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg
Prof. Dr.-Ing. M. Albach	
Klausur in Grundlagen der Elektrotechnik I am 25. März 2010	

MUSTERLÖSUNG

Aufgabe 1:**(17 Punkte)**

$$a) \quad I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^h \int_0^{2\pi} J_\rho(\rho) \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \rho \, d\varphi \, dz = 2\pi h J_\rho(\rho) \rho$$

$$\vec{J}_\rho = \frac{I}{2\pi \rho h} \vec{e}_\rho$$

b) Elektrische Feldstärke im Widerstandsmaterial 1 ($a < \rho < l_1$):

$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{J}}{\kappa_1} = \frac{1}{\kappa_1} \frac{I}{2\pi \rho h} \vec{e}_\rho$$

Elektrische Feldstärke im Widerstandsmaterial 2 ($l_1 < \rho < b$):

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{J}}{\kappa_2} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{I}{2\pi \rho h} \vec{e}_\rho$$

$$c) \quad U = \int_{\text{Innenleiter}}^{\text{Außenleiter}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^{l_1} \vec{E}_1 \cdot \vec{e}_\rho \, d\rho + \int_{l_1}^b \vec{E}_2 \cdot \vec{e}_\rho \, d\rho = \frac{I}{2\pi h} \left[\frac{1}{\kappa_1} \int_a^{l_1} \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{1}{\kappa_2} \int_{l_1}^b \frac{1}{\rho} d\rho \right]$$

$$U = \frac{I}{2\pi h} \left[\frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{l_1}{a} + \frac{1}{\kappa_2} \ln \frac{b}{l_1} \right]$$

$$d) \quad R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi h} \left[\frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{l_1}{a} + \frac{1}{\kappa_2} \ln \frac{b}{l_1} \right]$$

$$e) \quad P = P_1 + P_2 = RI^2 = \frac{1}{2\pi h} \left[\frac{1}{\kappa_1} \ln \frac{l_1}{a} + \frac{1}{\kappa_2} \ln \frac{b}{l_1} \right] I^2$$

$$P_1 = \frac{I^2}{2\pi h \kappa_1} \ln \frac{l_1}{a}, \quad P_2 = \frac{I^2}{2\pi h \kappa_2} \ln \frac{b}{l_1}$$

Aufgabe 2:**(14 Punkte)**

- a) Die Ladung verteilt sich gleichmäßig über den oberen Teil der Kugel, welcher der metallischen Fläche gegenübersteht.

Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a : $A = 4\pi a^2$

Oberer Teil der Metallkugel ($0 < \vartheta < \pi/2$): $\sigma = \frac{Q}{A/2} = \frac{2Q}{4\pi a^2} = \frac{Q}{2\pi a^2}$

- b) Die elektrische Feldstärke besitzt nur eine radiale Komponente und ist von der Koordinate r abhängig: $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

Das Innere der beiden metallischen Körper sowie der Außenraum sind feldfrei.

$0 < r < a$: $\vec{E} = \vec{0}$

$b < r$: $\vec{E} = \vec{0}$

Für den Innenbereich gilt:

$$Q = \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \epsilon E(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = 2\pi \epsilon E(r) r^2$$

$a < r < b$: $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$

$$c) U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b E(r) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{2\pi \epsilon} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=a}^{r=b} = \frac{Q}{2\pi \epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{2\pi \epsilon} \frac{b-a}{ab}$$

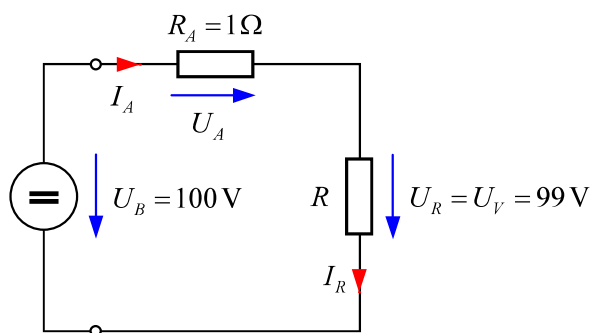
$$d) C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \epsilon ab}{b-a}$$

- e) Im Widerstand wird die komplette im Kondensator gespeicherte elektrische Energie in Wärme umgesetzt.

$$E = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU = \frac{Q^2}{4\pi \epsilon} \frac{b-a}{ab}$$

Aufgabe 3:**(10 Punkte)**

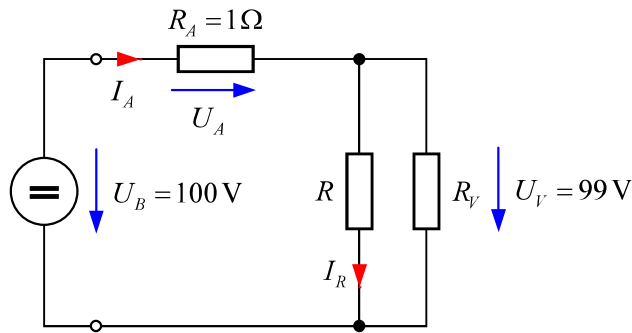
- a) In diesem Fall erhalten wir das folgende vereinfachte Netzwerk mit



$$I_A = I_R = \frac{U_A}{R_A} = \frac{1 \text{ V}}{1 \Omega} = 1 \text{ A}$$

$$R = \frac{U_R}{I_R} = \frac{99 \text{ V}}{1 \text{ A}} = 99 \Omega$$

b) Ersatznetzwerk



analoge Rechnung zu a)

$$I_A = 1 \text{ A} , \quad R \parallel R_V = 99 \Omega$$

$$R \parallel R_V = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V} = 99 \Omega$$

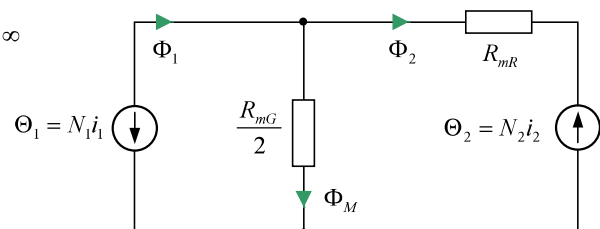
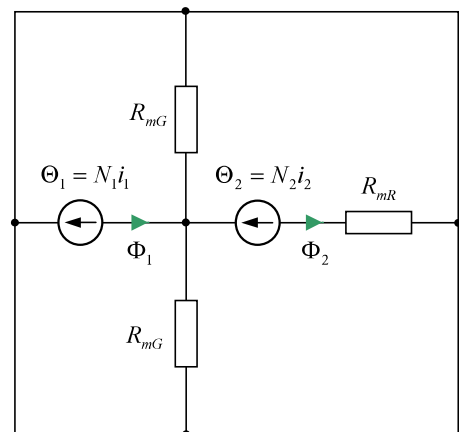
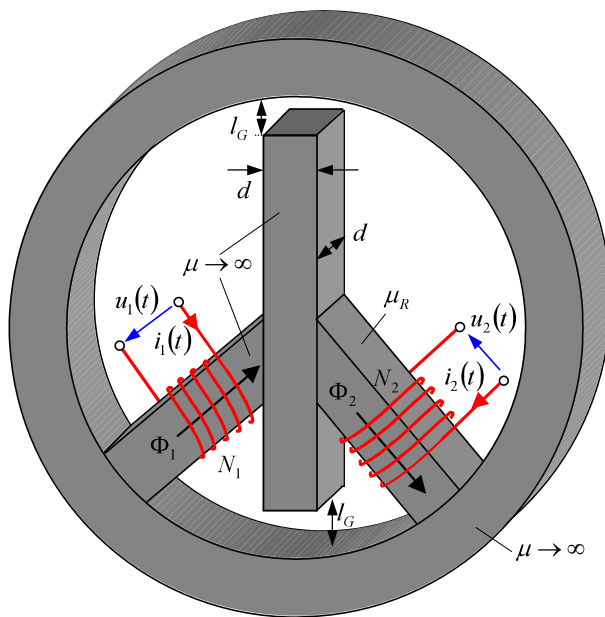
$$R \cdot (R_V - 99 \Omega) = R_V \cdot 99 \Omega$$

$$R = \frac{R_V \cdot 99 \Omega}{R_V - 99 \Omega} = \frac{990000}{9901} \Omega = 99,9899 \Omega$$

Aufgabe 4:

(18 Punkte)

- a) Für $\mu \rightarrow \infty$ verschwindet der magnetische Widerstand des runden Außenschenkels sowie des linken, mit N_1 bewickelten Schenkels. Die verbleibenden magnetischen Widerstände werden durch die Luftspalte sowie den mit N_2 bewickelten Schenkel gebildet und man erhält folgendes Ersatzschaltbild:



Mit $R_{mG} = \frac{l_G}{\mu_0 d^2}$ und $R_{mR} = \frac{l_R}{\mu_R d^2}$

Der Fluss Φ_M kann direkt angegeben werden mit $\Phi_M = \frac{\Theta_1}{R_{mG}/2} = \frac{2N_1 i_1}{R_{mG}}$

Der äußere Maschenumlauf liefert $-\Theta_1 - \Theta_2 + \Phi_2 R_{mR} = 0 \rightarrow \Phi_2 = \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_{mR}}$

Durch Auswertung der Knotengleichung erhält man

$$\Phi_1 = \Phi_M + \Phi_2 = \frac{2N_1 i_1}{R_{mG}} + \frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{R_{mR}}$$

b) Für die Selbstinduktivitäten erhält man

$$L_{11} = \left. \frac{\Phi_{11}}{i_1} \right|_{i_2=0} = \left. \frac{N_1 \Phi_1}{i_1} \right|_{i_2=0} = N_1^2 \left(\frac{2}{R_{mG}} + \frac{1}{R_{mR}} \right)$$

$$L_{22} = \left. \frac{\Phi_{22}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{N_2 \Phi_2}{i_2} \right|_{i_1=0} = N_2^2 \frac{1}{R_{mR}}$$

Für die Gegeninduktivität erhält man

$$M = \left. \frac{\Phi_{21}}{i_1} \right|_{i_2=0} = \left. \frac{N_2 \Phi_2}{i_1} \right|_{i_2=0} = \frac{N_1 N_2}{R_{mR}} \quad \text{bzw.} \quad M = \left. \frac{\Phi_{12}}{i_2} \right|_{i_1=0} = \left. \frac{N_1 \Phi_1}{i_2} \right|_{i_1=0} = \frac{N_1 N_2}{R_{mR}}$$

$$\text{c) Gl. (6.48):} \quad k = \frac{M}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} = \frac{\frac{N_1 N_2}{R_{mR}}}{\sqrt{\frac{N_1^2 (2R_{mR} + R_{mG})}{R_{mG} R_{mR}} \frac{N_2^2}{R_{mR}}}} = \sqrt{\frac{R_{mG}}{2R_{mR} + R_{mG}}}$$

Für $l_G \rightarrow 0$ verschwindet der magnetische Widerstand des Mittelschenkels R_{mG} und der Koppelfaktor k verschwindet mit $k = 0$. Durch den verschwindenden magnetischen Widerstand in diesem Fall ergibt sich ein Kurzschluss an der Stelle von R_{mG} im magnetischen Ersatzkreis und die beiden Maschen sind vollständig entkoppelt.

Für $\mu_R \rightarrow \infty$ verschwindet der magnetische Widerstand R_{mR} und der komplette Fluss, welcher von einer der beiden Wicklungen erzeugt wird, durchsetzt die andere. Dementsprechend ergibt sich der Sonderfall des streufreien Übertragers mit $k = 1$. (Zusätzlich ergibt sich $L_{11} \rightarrow \infty$ und $L_{22} \rightarrow \infty$, somit erhält man für diesen Fall einen idealen Transformator mit unendlich großer Hauptinduktivität.)

Aufgabe 5:**(10 Punkte)**

$$a) \quad \underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 \quad \underline{Z}_2 = \frac{j\omega L_2 R_2}{j\omega L_2 + R_2}$$

$$b) \quad \frac{\hat{u}_2}{\hat{u}_0} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{j\omega L_2 R_2}{(j\omega L_2 + R_2) \left[R_1 + j\omega L_1 + \frac{j\omega L_2 R_2}{j\omega L_2 + R_2} \right]}$$

$$\hat{u}_2 = \frac{j\omega L_2 R_2}{R_1 j\omega L_2 + R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 + j\omega L_1 R_2 + j\omega L_2 R_2} \hat{u}_0$$

c) Damit \hat{u}_0 und \hat{u}_2 in Phase sind, muss das Verhältnis \hat{u}_2 / \hat{u}_0 reell und positiv sein.

d) Der Zähler in Teilaufgabe b) ist rein imaginär. Das Spannungsverhältnis wird also reell, wenn der Nenner ebenfalls rein imaginär wird, d.h. der Realteil im Nenner muss verschwinden. Damit gilt:

$$R_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \omega L_1 = \frac{R_1 R_2}{\omega L_2}$$

$$\text{Mit den angegebenen Daten folgt:} \quad \omega L_1 = \frac{20\Omega \cdot 60\Omega}{30\Omega} = 40\Omega$$

Aufgabe 6:**(15 Punkte)**

a) Die magnetische Flussdichte ist homogen $\rightarrow \Phi(t) = \vec{B}(t) \cdot \vec{A}(t)$

$$\vec{B}(t) = -B_0 \vec{e}_z \quad \vec{A}(t) = -\vec{e}_z \frac{1}{2} x(t) \cdot y(t) = -\vec{e}_z \frac{1}{2} v_0 t \cdot v_0 t \quad \rightarrow \quad \Phi(t) = \frac{1}{2} B_0 v_0^2 t^2$$

Alternative Vorgehensweise:

$$\Phi(t) = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^{y(t)} \int_0^{x(t)} -B_0 \vec{e}_z \cdot (-\vec{e}_z) dx dy = B_0 v_0 \int_0^{y(t)} t dy \stackrel{\text{Substitution } y=v_0 t}{=} B_0 v_0 \int_0^t v_0 dt = \frac{1}{2} B_0 v_0^2 t^2$$

b) Rechtshändige Verknüpfung von Umlaufsinn und Flussrichtung

$$-u(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -B_0 v_0^2 t \quad \rightarrow \quad u(t) = B_0 v_0^2 t$$

$$c) \quad i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{B_0 v_0^2 t}{R}$$

$$d) \quad \vec{F} \stackrel{(6.10)}{=} i(t) l(t) \vec{e}_y \times B_0 (-\vec{e}_z) = -i(t) l(t) B_0 \vec{e}_x$$

Aufzuwendende Kraft in entgegengesetzte Richtung \rightarrow positiv

$$\vec{F}(t) = \frac{B_0 v_0^2 t}{R} v_0 t B_0 \vec{e}_x = \frac{B_0^2 v_0^3 t^2}{R} \vec{e}_x$$

e) $p(t) = i^2(t)R = \frac{B_0^2 v_0^4 t^2}{R}$

- f) Es muss die Kraft \vec{F} aufgewendet werden um den Stab zu bewegen. Somit muss mechanische Energie in das System hineingesteckt werden. Diese wird in elektrische Energie umgewandelt.

Aufgabe 7:

(16 Punkte)

a) $\hat{i}_1 = \frac{\hat{u}}{\underline{Z}_1} = \frac{\hat{u}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega C_1 R_1} \hat{u}$

$$\hat{i}_2 = \frac{\hat{u}}{\underline{Z}_2} = \frac{\hat{u}}{R_2 + j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{j\omega C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2 + j\omega C_2 R_2} \hat{u}$$

$$\hat{i}_3 = \frac{\hat{u}}{\underline{Z}_3} = \frac{\hat{u}}{R_3 + j\omega L_3}$$

- b) Für die RL -Tiefpass-Schaltung gilt nach Gl. (2.67)

$$f_g = \frac{R_3}{2\pi L_3} = \frac{8\Omega}{2\pi \cdot 0,75\text{mH}} \approx 1,7\text{kHz}$$

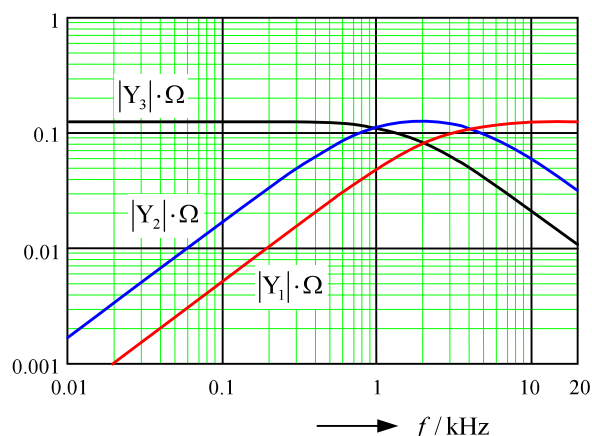
- c) Für die RC -Hochpass-Schaltung gilt nach Gl. (2.74)

$$f_g = \frac{1}{2\pi R_1 C_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 8\Omega \cdot 8,2\mu\text{F}} \approx 2,43\text{kHz}$$

- d) Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,25\text{mH} \cdot 27\mu\text{F}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 27}} \text{kHz} \approx 1,94\text{kHz}$$

Auswertung (nicht Bestandteil der Klausur):



Betrag der Admittanzen als Funktion der Frequenz