

PVK – Netzwerke und Schaltungen 1

Elektrostatik

E-Feld

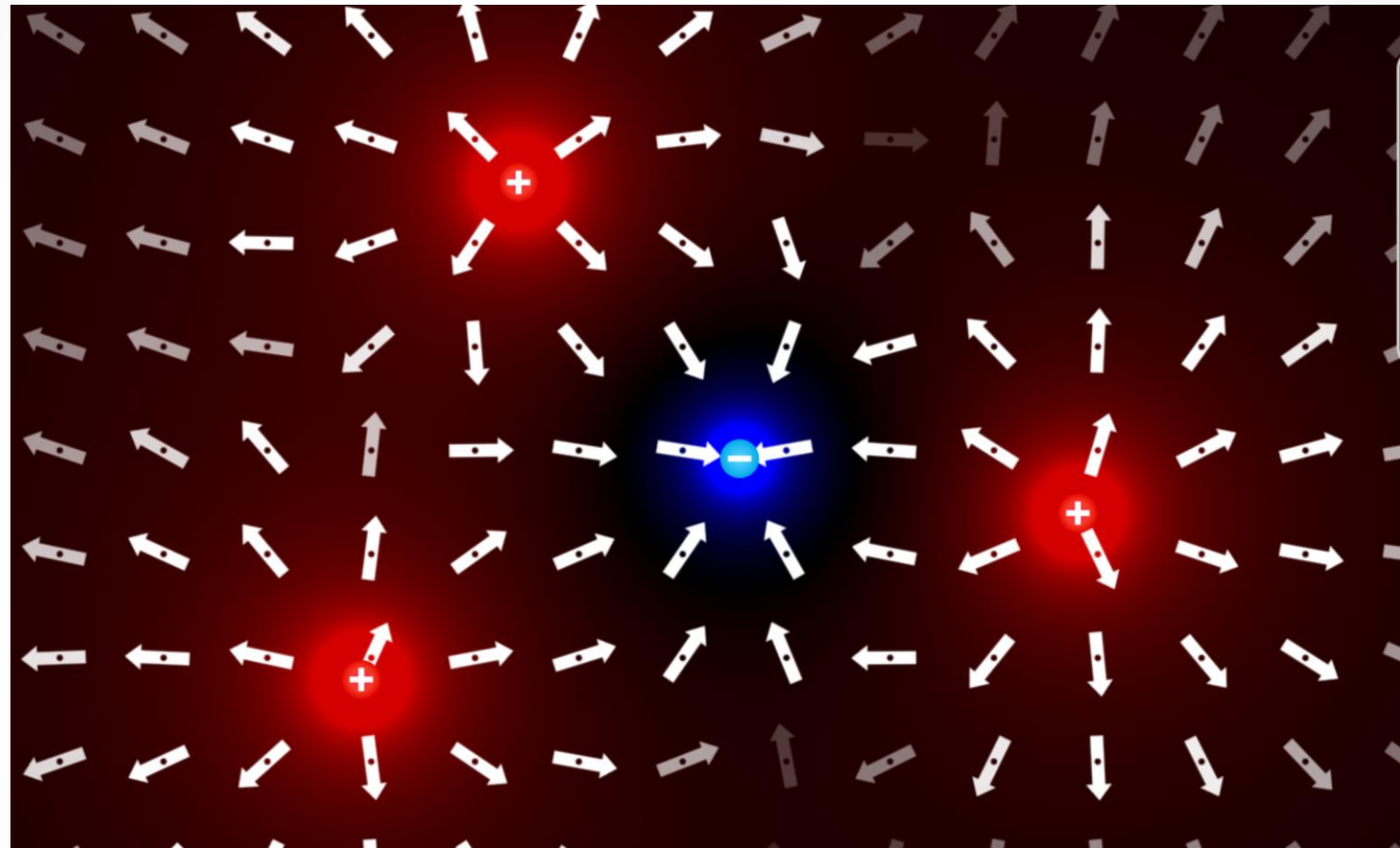
Ladungsdichten

D-Feld

Superposition

Kapazität

Kondensator

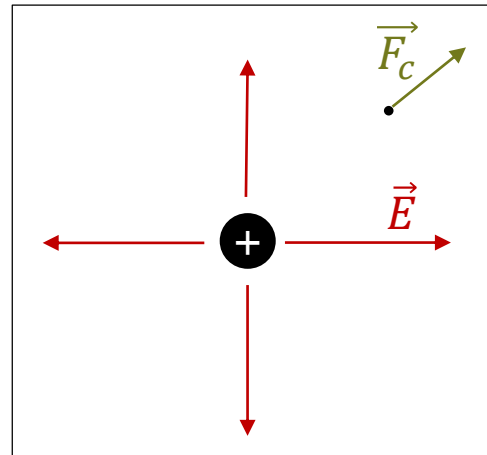


https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_en.html

Das elektrische Feld

Das elektrische Feld beschreibt, was für Kräfte auf einen Ladungsträger wirken

- Feldlinien gehen immer von + nach –
- Feldlinien schneiden sich nie
- Die Kraft, welche auf einen Ladungsträger in einem E-Feld wirkt, bezeichnen wir als Coulomb-Kraft



$$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}$$

Ladungsdichten

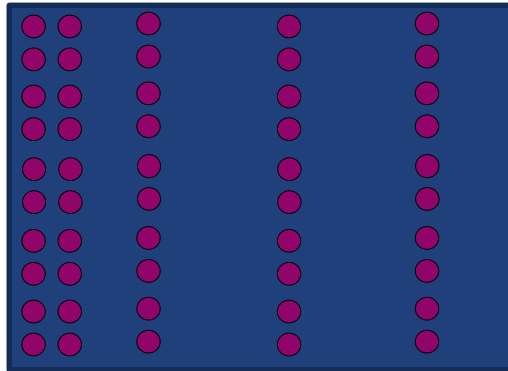
Ladungsdichten beschreiben, wie sich Ladungen geometrisch aufteilen

Linienladungsdichte
 $\lambda(x)$



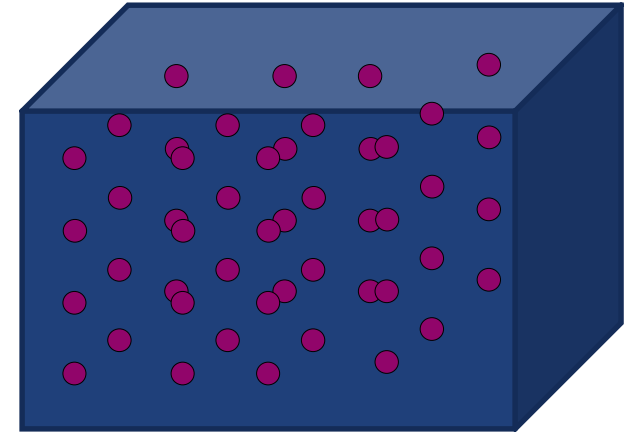
$$Q = \int \lambda(x) dx$$

Flächenladungsdichte
 $\sigma(x, y)$



$$Q = \iint_A \sigma \cdot dA$$

Volumenladungsdichte
 $\rho(x, y, z)$



$$Q = \iiint_V \rho \cdot dV$$

Ladungsdichten

Sind die Ladungen gleichmässig verteilt, so vereinfacht sich die Berechnung

Linienladungsdichte

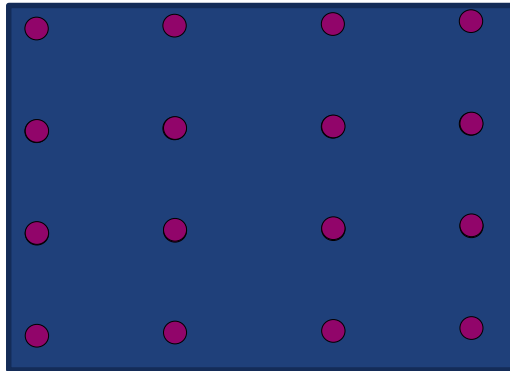
$$\lambda = \frac{Q_{\text{ges}}}{l}$$



$$Q = \lambda \cdot l$$

Flächenladungsdichte

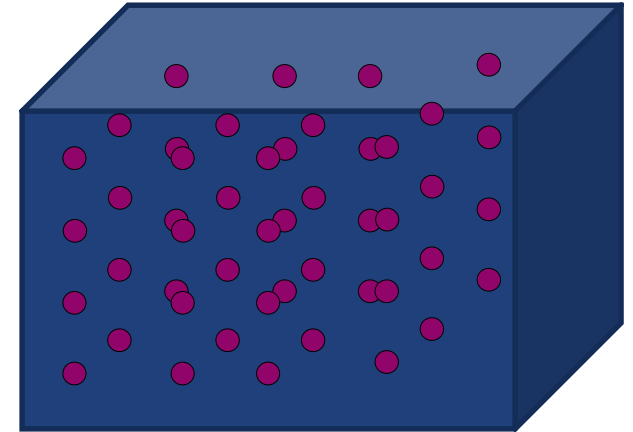
$$\sigma = \frac{Q_{\text{ges}}}{A}$$



$$Q = \sigma \cdot A$$

Volumenladungsdichte

$$\rho = \frac{Q_{\text{ges}}}{V}$$



$$Q = \rho \cdot V$$

Beispiel

Eine Gesamtladung von 50 C verteilt sich gleichmässig auf der Oberfläche eines Würfels mit Seitenlänge l .

Wie gross ist die Flächenladungsdichte σ ?

Antwort:

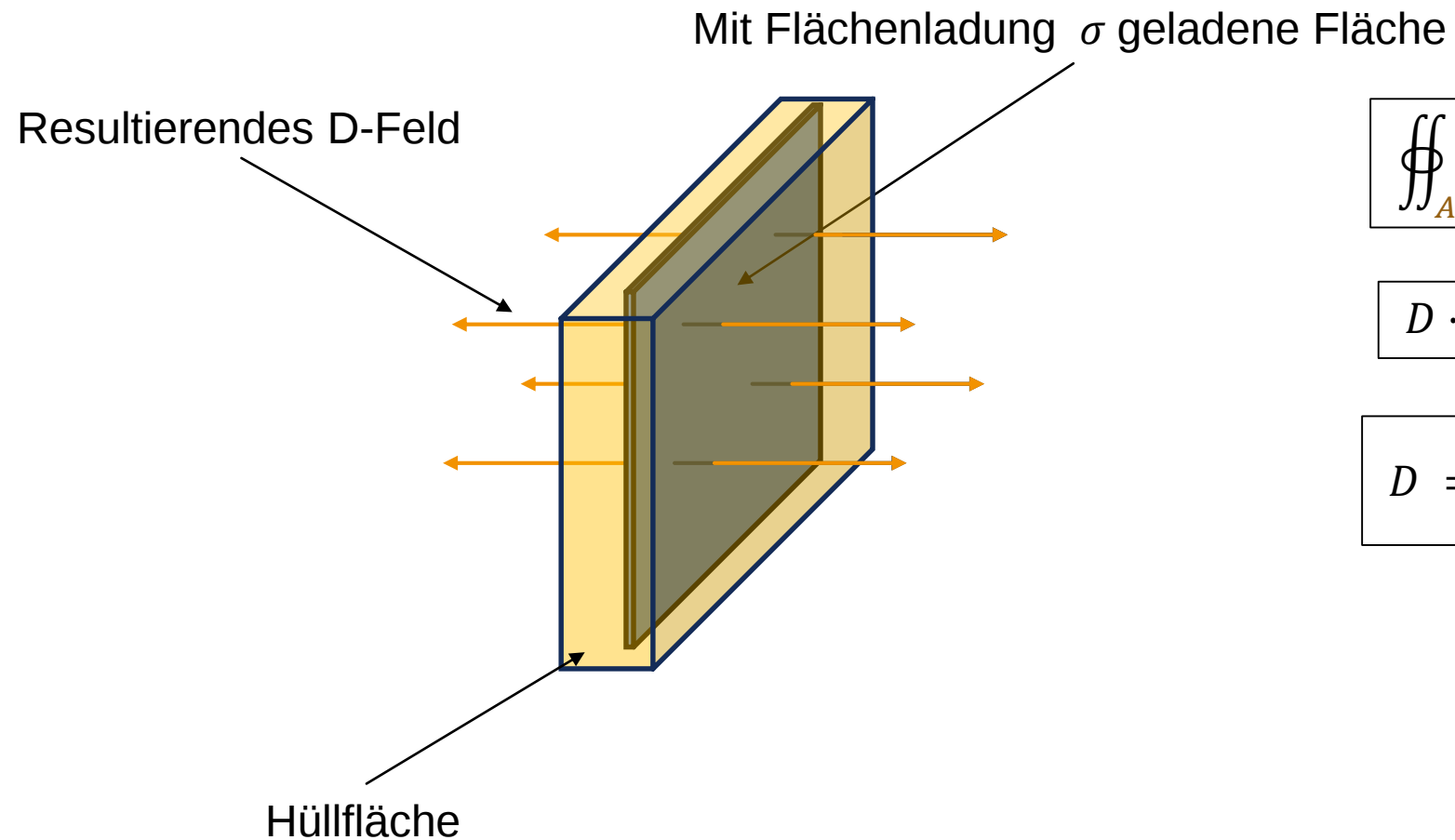
Elektrische Flussdichte (D-Feld)

Die elektrische Flussdichte, beschreibt das Feld, welches nur von den Ladungen ausgelöst wird

$$\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_{V_A} \rho \cdot dV = Q_A$$

«Der Fluss des D-Feldes über eine Hüllfläche **A** entspricht der sich innerhalb der Fläche befindenden **Ladung**»

Beispiel: D-Feld einer Platte



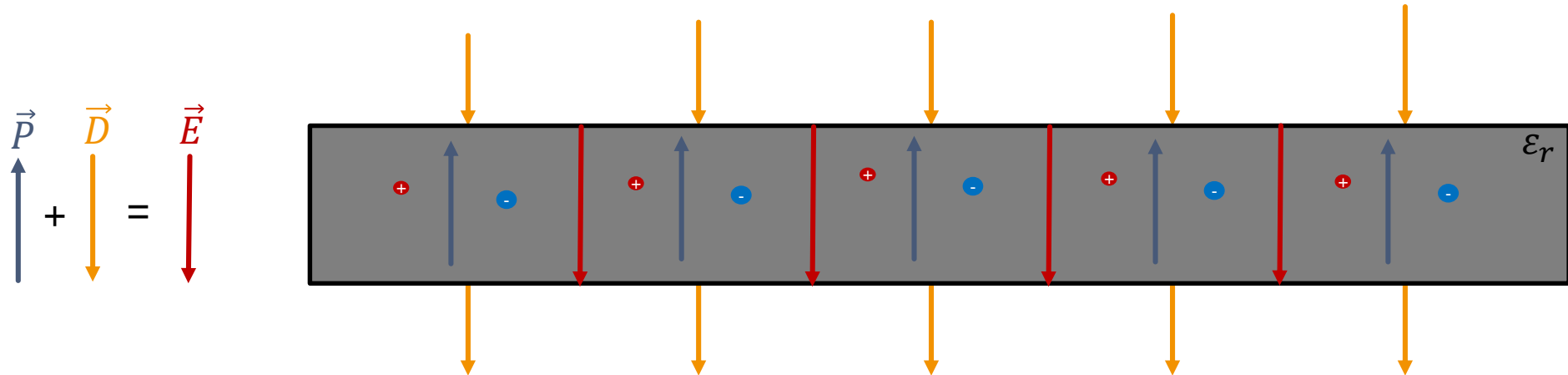
$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iint_A \sigma \cdot dA$$

$$D \cdot A_{eff} = \sigma \cdot A_{Platte}$$

$$D = \sigma \cdot \frac{A_{Platte}}{2 \cdot A_{Platte}} = \frac{\sigma}{2}$$

Polarisation von Material

Fliesst eine elektrische Flussdichte ($\vec{D}$) durch ungeladenes Material mit freien Ladungsträger, so werden Ladungsträger im Material getrennt wodurch sich ein Gegenfeld aufbaut.



Das resultierende Feld, beschreiben wir als elektrisches Feld.

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r}$$

Im Vakuum Materialabhängig

Superposition

Möchten wir das Feld einer komplizierten Anordnung berechnen, so können wir die Anordnung in einfache Teile aufteilen, dessen Feld berechnen und die Resultate aufsummieren.

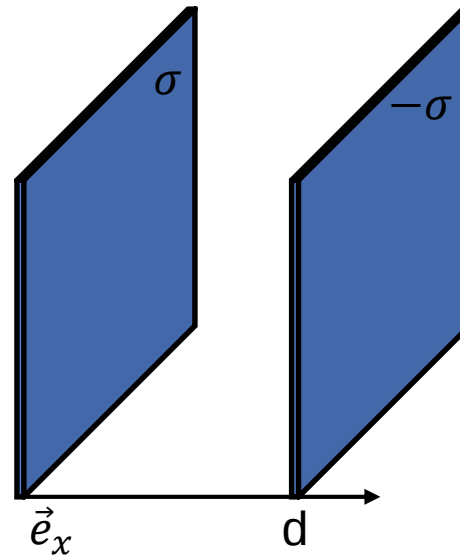
Gilt sowohl bei elektrischen wie auch magnetischen Feldern

Beispiel: Feld zweier Platten

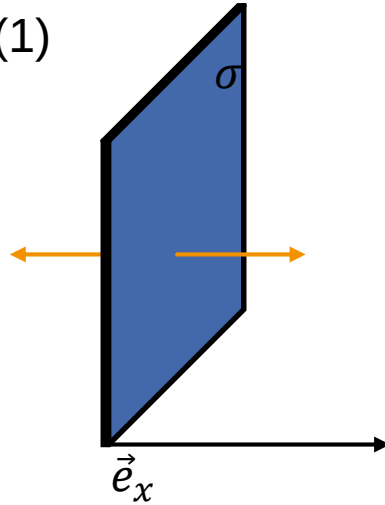
Berechnen Sie das Feld folgender Anordnung.

Die Platten können als **unendlich dünn** und **unendlich lang** angesehen werden

Kein Feld auf den Rändern

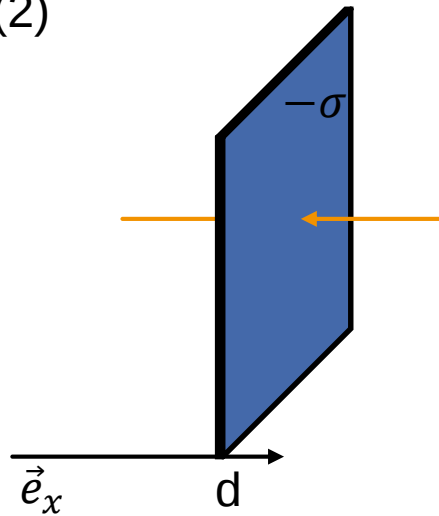


Superpos. (1)

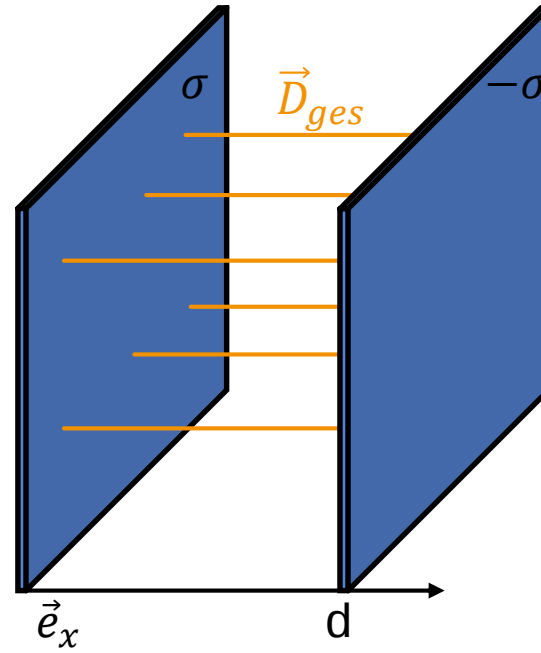


$$D_1 = \frac{\sigma}{2} \rightarrow \overrightarrow{D_1} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \cdot (-\vec{e}_x), & x < 0 \\ \frac{\sigma}{2} \cdot \vec{e}_x, & x > 0 \end{cases}$$

Superpos. (2)



$$D_2 = -\frac{\sigma}{2} \rightarrow \overrightarrow{D_2} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \cdot (\vec{e}_x), & x < d \\ \frac{\sigma}{2} \cdot (-\vec{e}_x), & x > d \end{cases}$$



$$\vec{D}_{ges} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 = \begin{cases} \sigma \cdot \vec{e}_x, & 0 < x < d \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

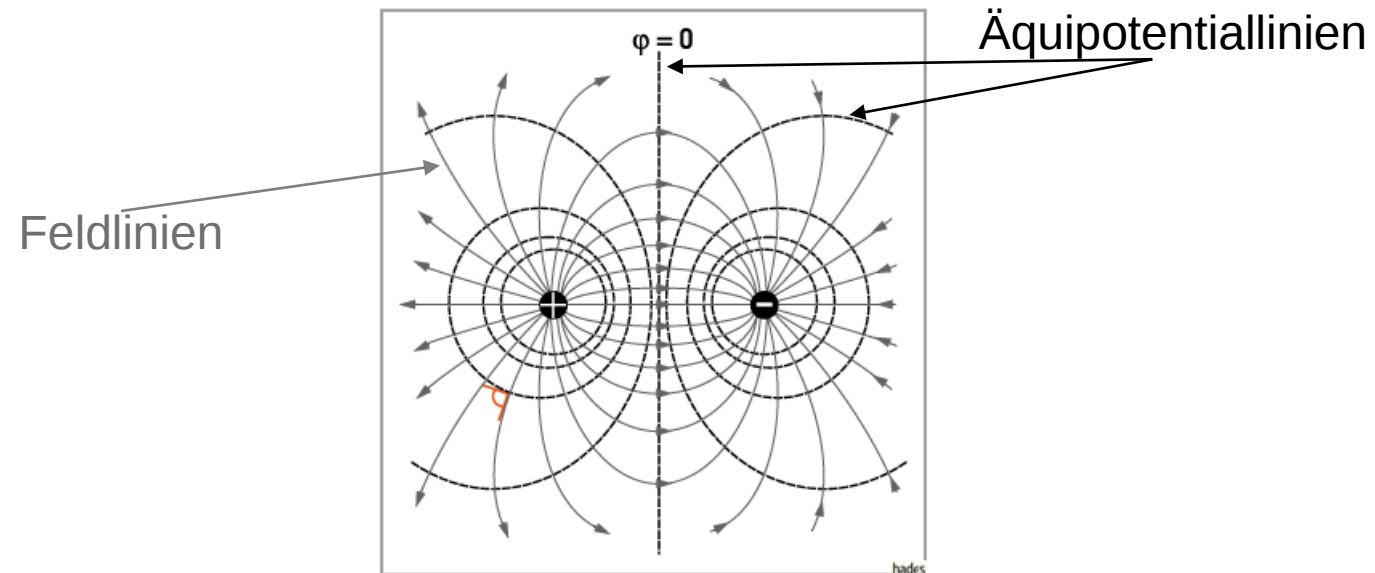
Potential

Das Potential an einem Punkt, beschreibt die **potentielle Energie pro Ladung**

$$\varphi_e(P) = \frac{E_{pot}}{q}$$

Bezugspunkt Punkt im Raum

Äquipotentiallinien bezeichnen Punkte im Raum, wo das Potential gleich Gross ist (= *Gleiche Pot. Energie*)



Spannung

Die Spannung ist ein Mass für die Arbeit, welche verrichtet werden muss, um ein Teilchen von A nach B zu bringen

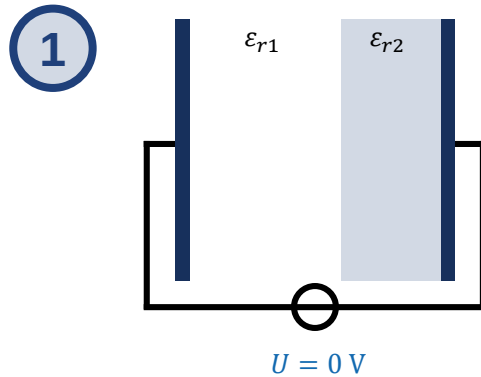
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_e(A) - \varphi_e(B)$$

$$[U_{AB}] = V$$

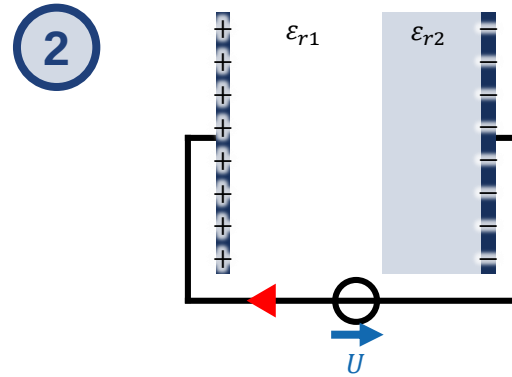
- Zwischen Punkten auf der selben Äquipotential-linie ist die Spannung immer gleich 0
- Die Spannung auf einem geschlossenen Weg ist immer gleich 0

$$U_{AB} + U_{BA} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{s} = \varphi_e(A) - \varphi_e(B) - [\varphi_e(A) - \varphi_e(B)] = 0V$$

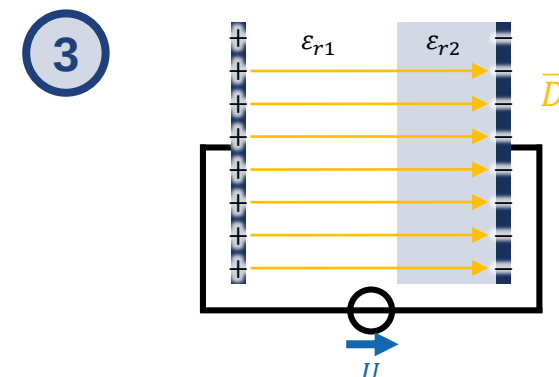
Herleitung der Felder im Kondensator



Kondensator ist entladen.
Keine Felder, keine
Spannung,
keine Energie gespeichert.



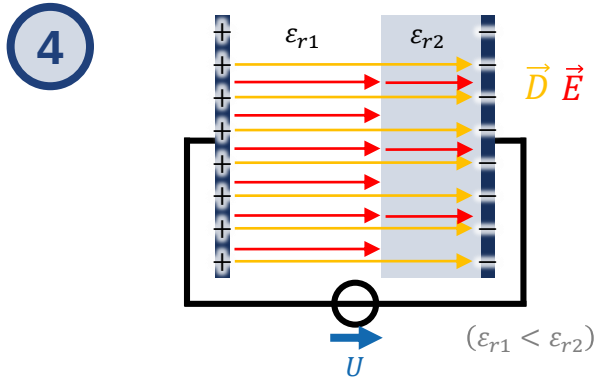
Spannung wird angelegt.
Freie Elektronen im Metall
wandern
von der einen Platte auf die
andere.
Ein Strom fließt, Ladung baut
sich auf!



Durch die getrennten Ladungen ent-
steht eine elektrische Flussdichte D
entsprechend dem Gesetz von
Gauss

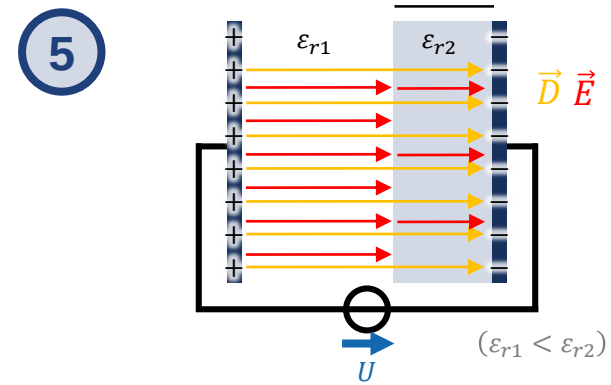
$$\oiint_A \vec{D} \, d\vec{A} = Q$$

Herleitung der Felder im Kondensator



Das elektrische Feld $\vec{E}$ verteilt sich entsprechend der Materialgleichung

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$



Es wird genau so viel Ladung geteilt, damit sich die erzwungene Spannung über dem Kondensator einstellt.

$$U = \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = d_1 \cdot E_1 + d_2 \cdot E_2$$

Kapazität C

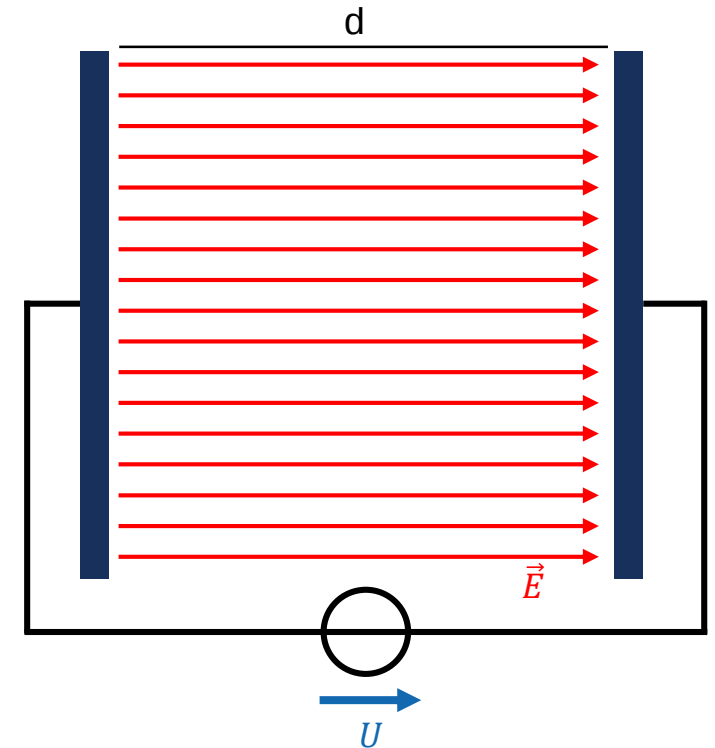
Wie viel Ladung Q sammelt sich auf den Platten an, wenn eine bestimmte Spannung U angelegt wird?

$$Q = C \cdot U$$

$$C := \frac{Q}{U}$$

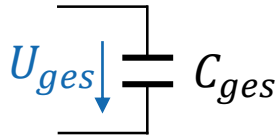
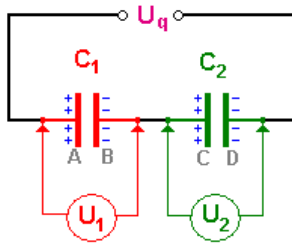
Für den Plattenkondensator gilt:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oiint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}} = \varepsilon \frac{A}{d}$$



Schaltungen mit Kondensator

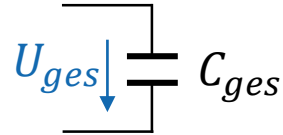
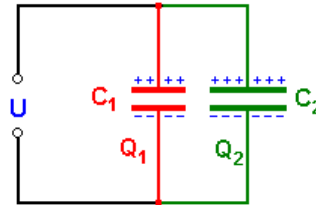
Serienschaltung



$$C_{\text{tot}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

**Gleiche Ladung
auf allen Platten!!**

Parallelschaltung



$$C_{\text{tot}} = C_1 + C_2$$

**Gleiche Spannung
über allen Platten!!**

Energie im Kondensator

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{D} \vec{E} dV = \frac{1}{2} \varepsilon \iiint_V \vec{E}^2 dV \propto \vec{E}^2 \propto U^2$$

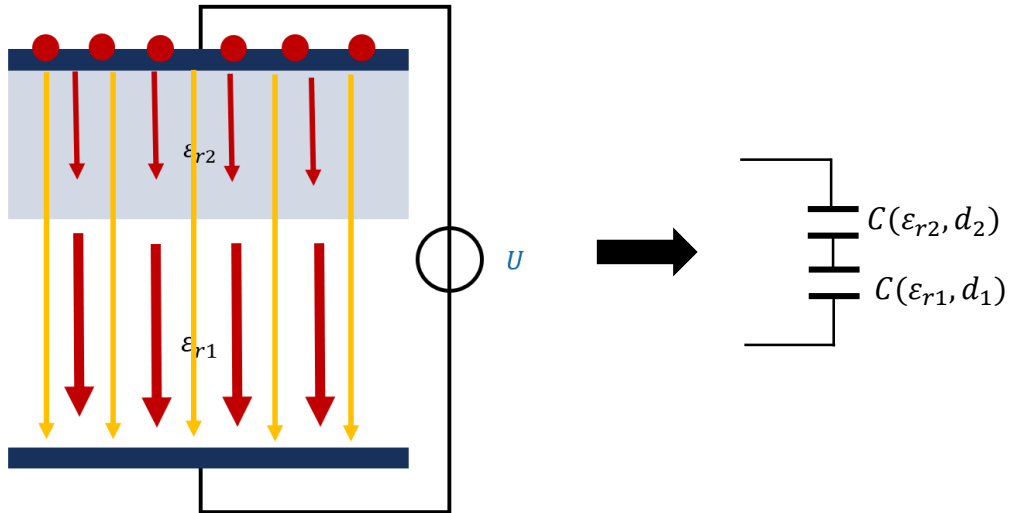
Mit der Definition der Kapazität vereinfacht sich dieser Term zu:

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2$$

Kondensator mit mehreren Dielektrika

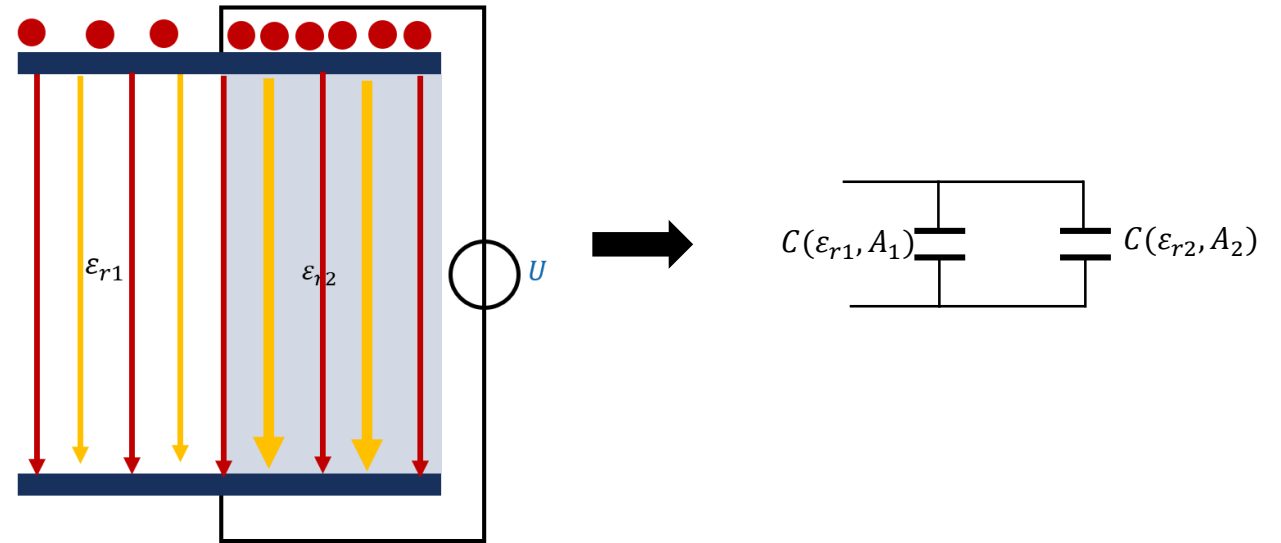
Material seriell

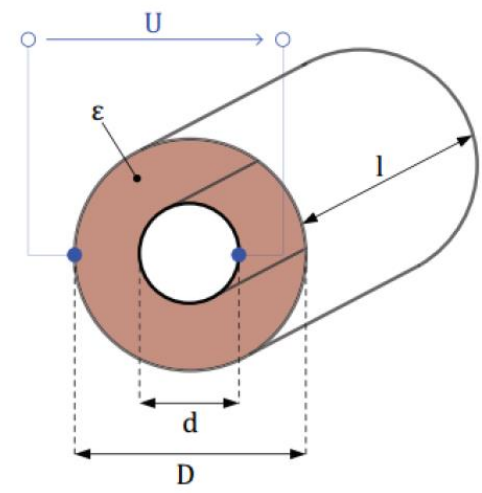
D-Feld Konstant ($= \frac{Q}{A}$)



Material parallel

E-Feld Konstant ($= \frac{U}{d}$)





Zusatzaufgabe

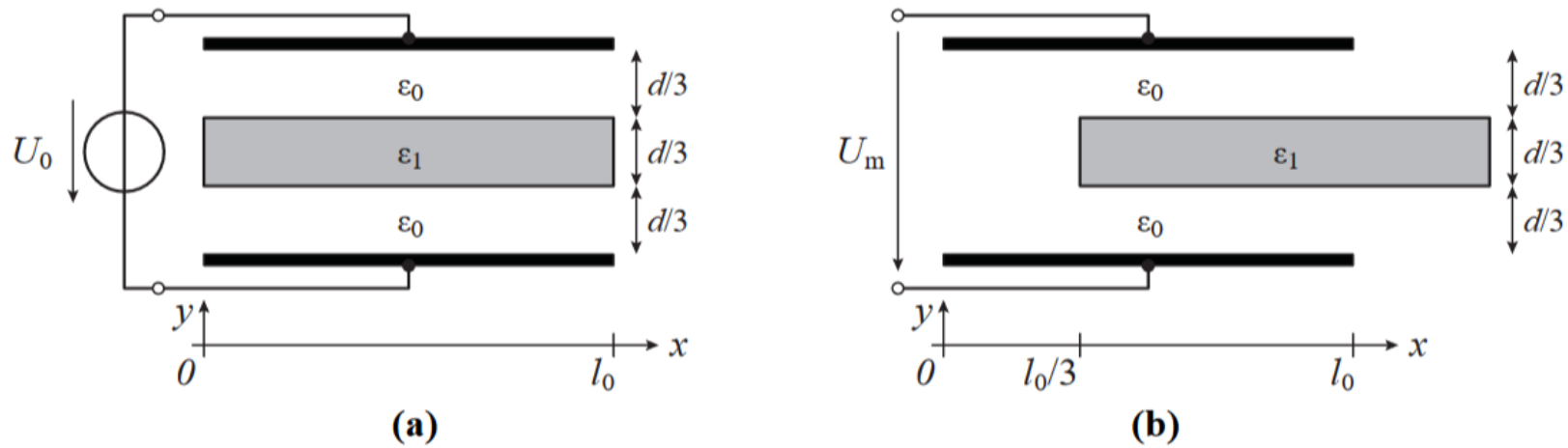


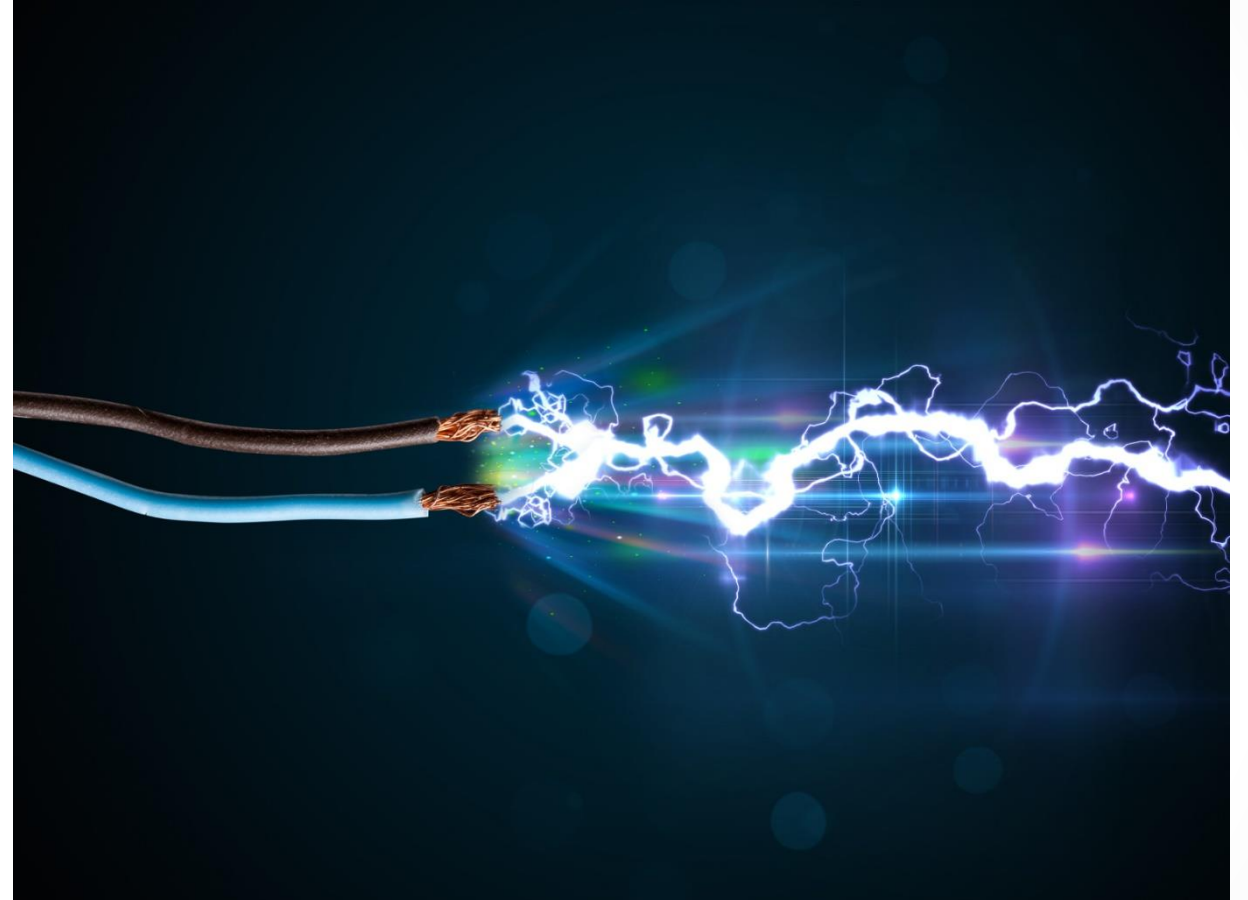
Fig. 1: Plattenkondensator mit unterschiedlichen Dielektrika.

Elektrisches Strömungsfeld

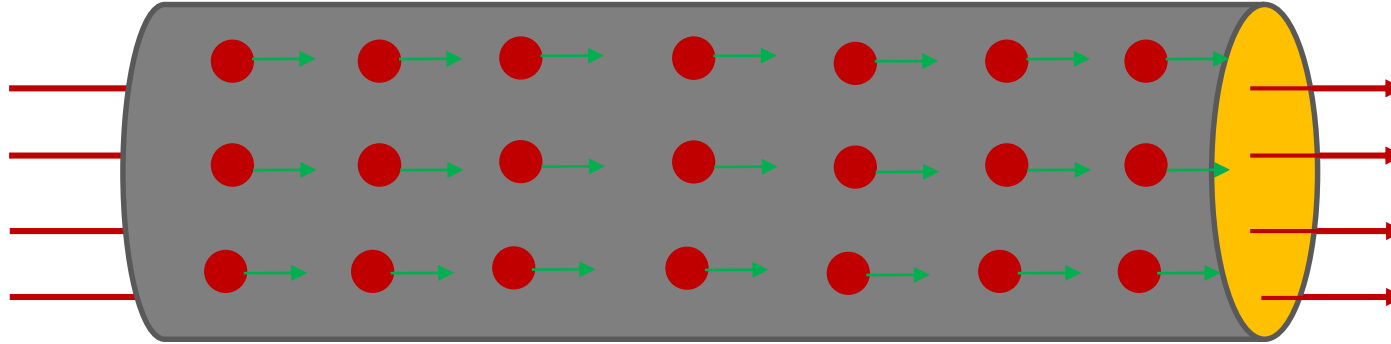
Stromdichte

Widerstand

Feldgrößen an Randflächen



Stromdichte



Fliesst ein E-Feld durch ein Metall mit Ladungsträger, so verspüren diese eine Kraft und bewegen sich in Richtung des E-Feldes.

$$\vec{j} = \kappa \cdot \vec{E} \quad , \quad [\vec{j}] = \frac{Q}{s} \cdot \frac{1}{m^2}$$

Abhängig vom Material

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \rightarrow I = J \cdot A_{eff}$$

Strom

Strom bezeichnet, wie viele **Ladungsträger** pro **Zeit** durch eine gewisse **Fläche** fließen

$$I = \frac{dQ}{dt} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \simeq j \cdot A_{eff}$$

Widerstand

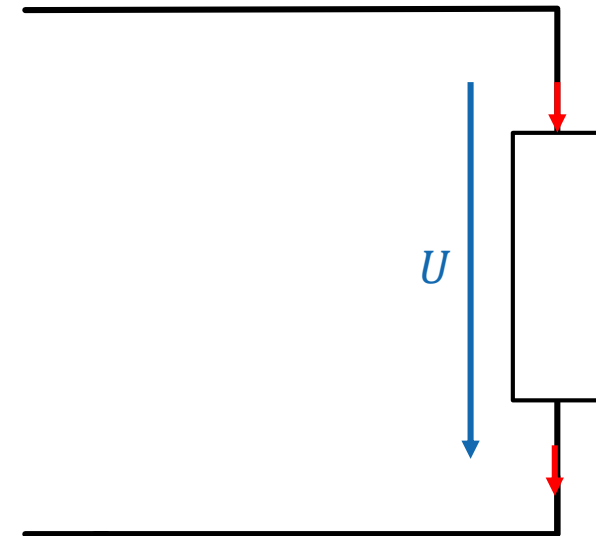
Der Widerstand beschreibt, wie sich Strom und Spannung an einem Bauelement verhalten

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}}{\iint_A \kappa \vec{E} \cdot d\vec{A}}$$

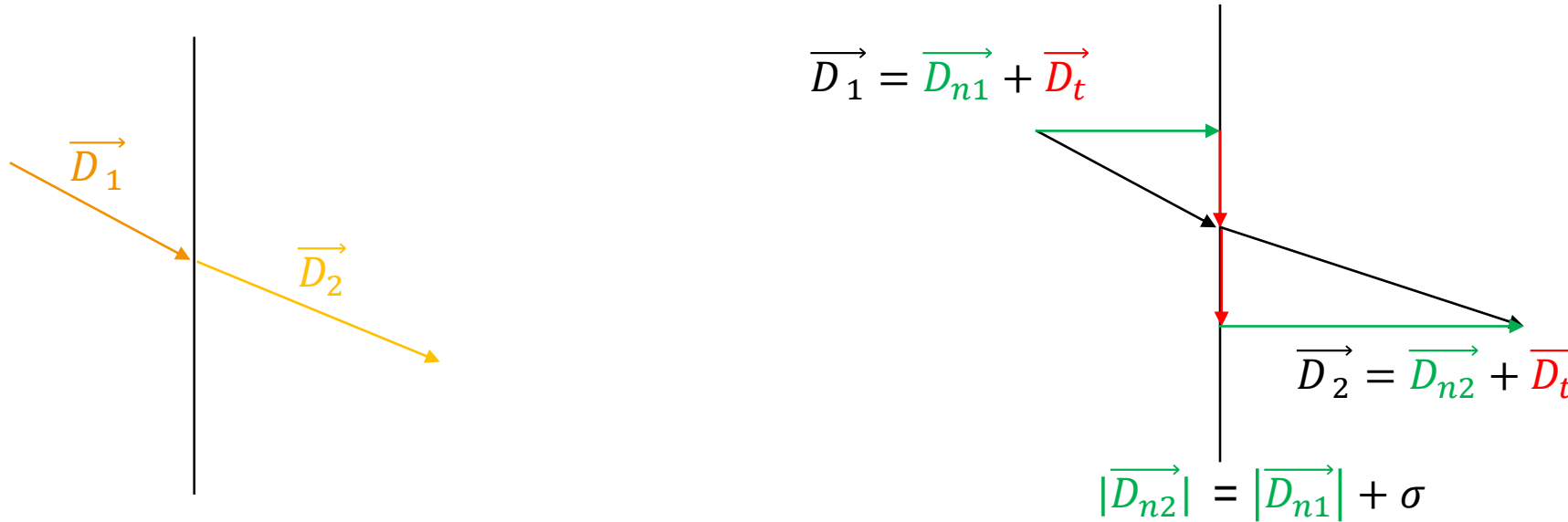
E Feld Konstant, Weg parallel, Fläche Senkrecht

$\rho := \frac{1}{\kappa}$, spez. Widerstand

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{E \cdot l}{E \cdot A} = \rho \cdot \frac{l}{A}$$



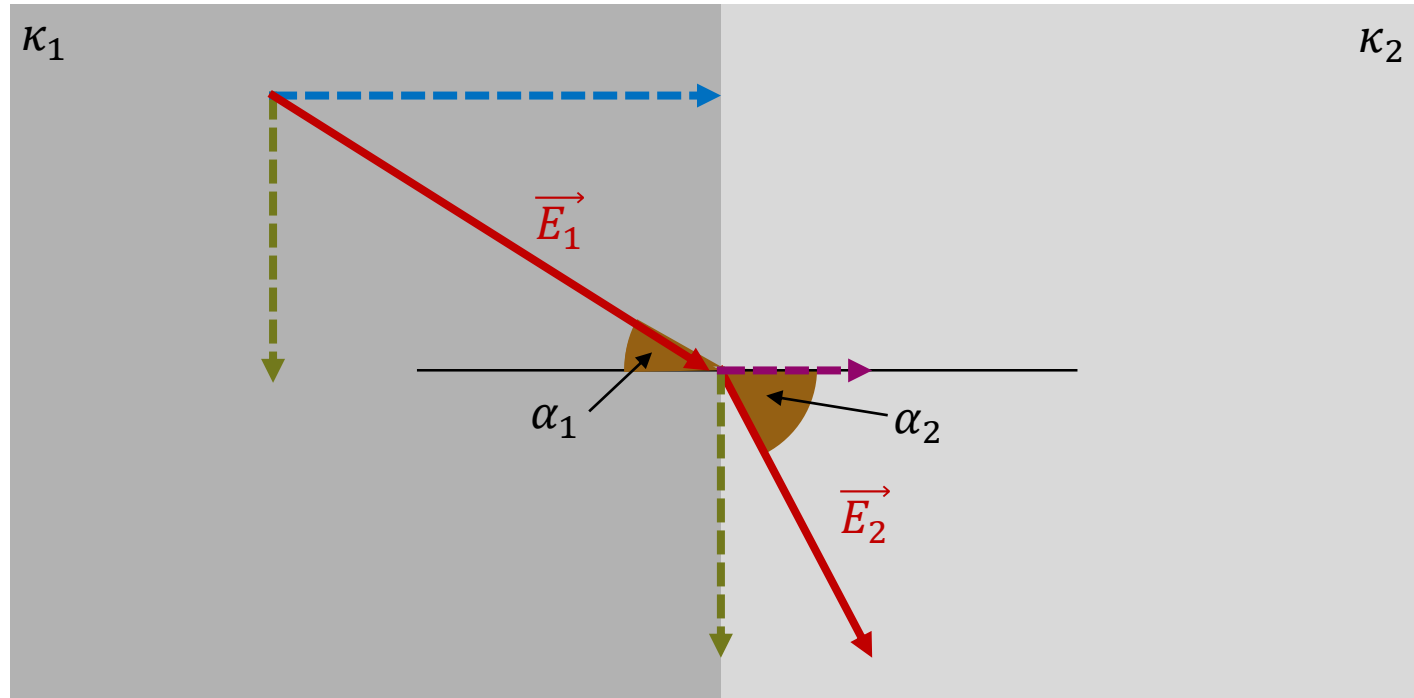
Verhalten von Feldgrössen an Randflächen (D-Feld)



Fliesst ein Elektrisches Flussdichte durch eine geladene Fläche, so verändert sich nur die Länge der **Normalkomponente** um die **Flächenladungsdichte**. Die **Tangentialkomponente bleibt Konstant**.

Konsequenz: Fällt ein D-Feld senkrecht auf eine geladene Fläche, so wird sie um σ stärker.

Verhalten von Feldgrössen an Randflächen (E-Feld)

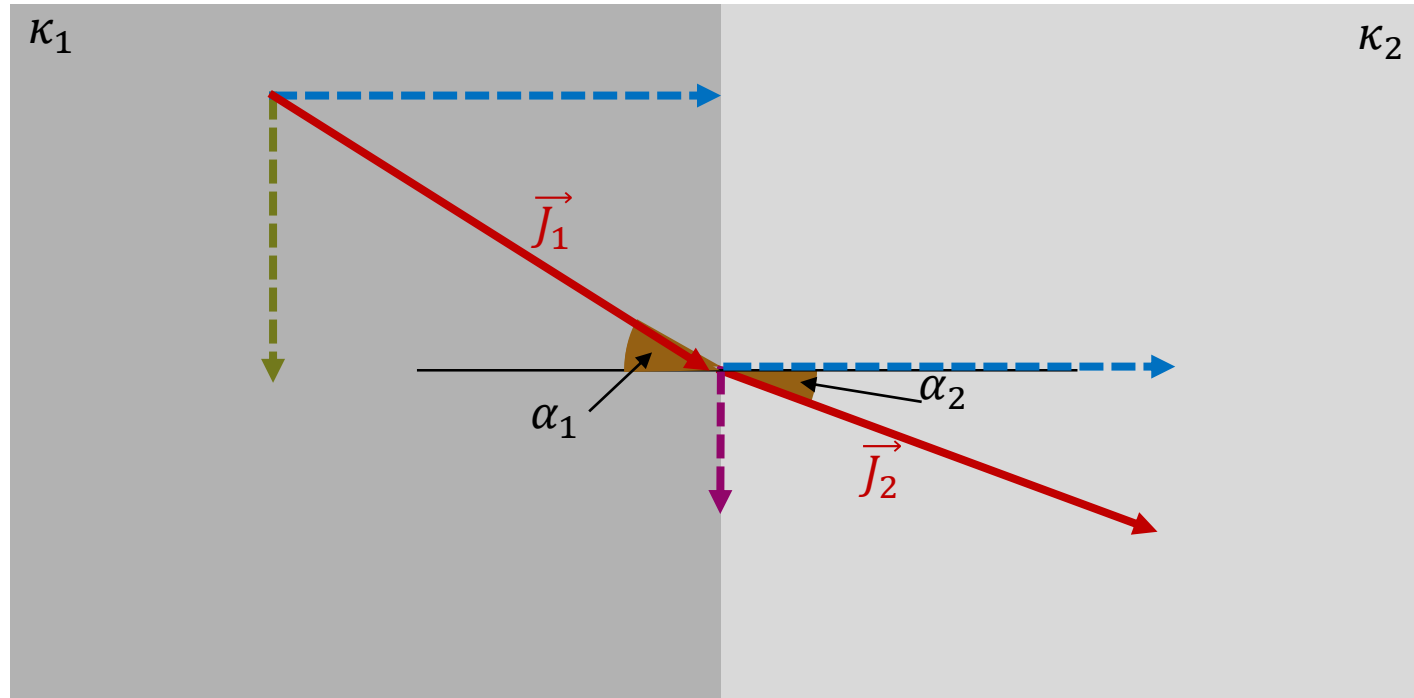


Fliesst ein elektrisch Feld durch einen Materialübergang , so bleibt die **Tangentialkomponente** gleich.

$$E_{t1} = E_{t2}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{E_{n2}}{E_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Verhalten von Feldgrössen an Randflächen (J-Feld)



Fliesst eine Stromdichte durch einen Materialübergang, so bleibt die **Normalkomponente** gleich.

$$J_{n1} = J_{n2}$$

$$\frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} = \frac{J_{t1}}{J_{t2}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

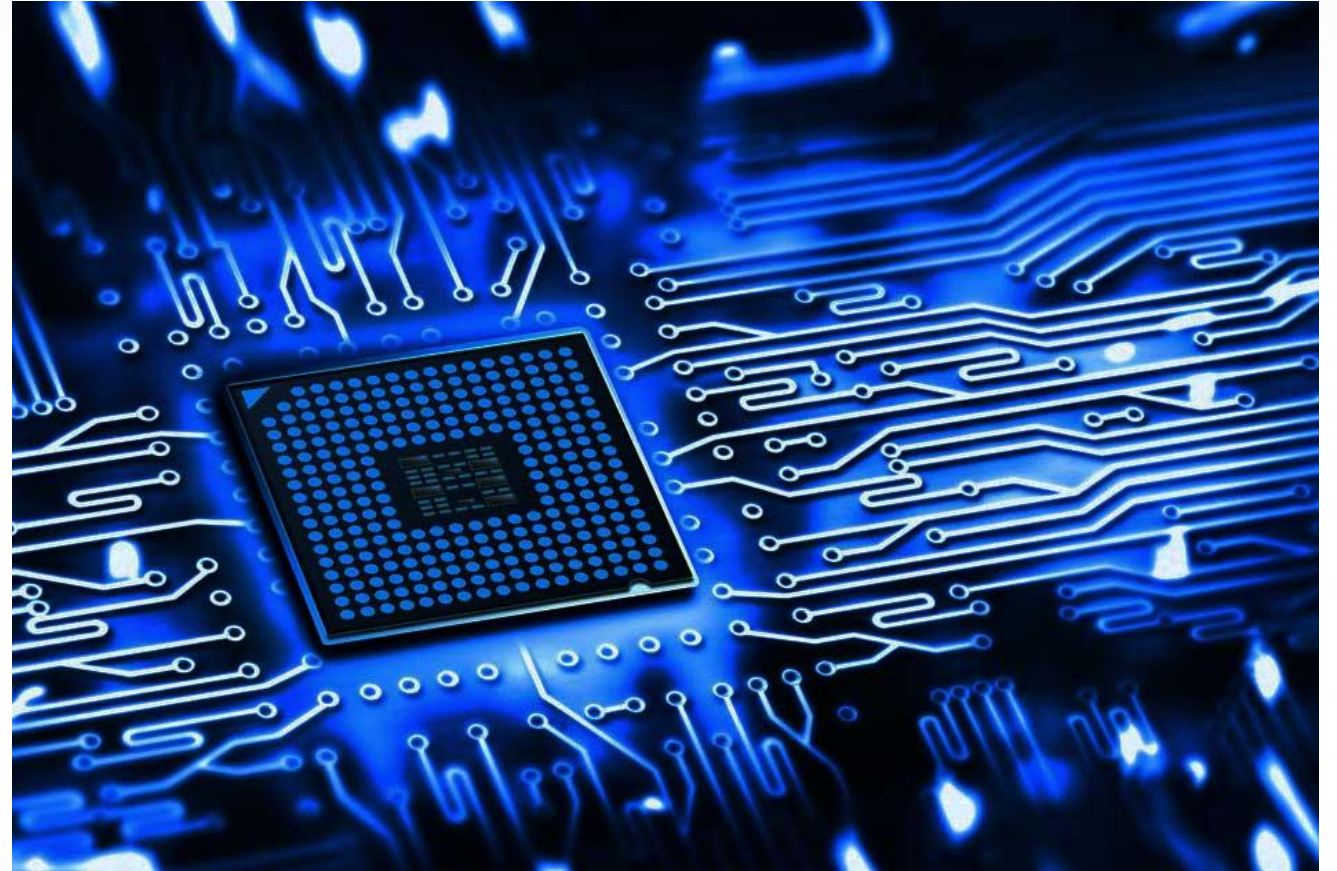
Stromleitungsmechanismen

Stromleitung im Vakuum (nicht behandelt)

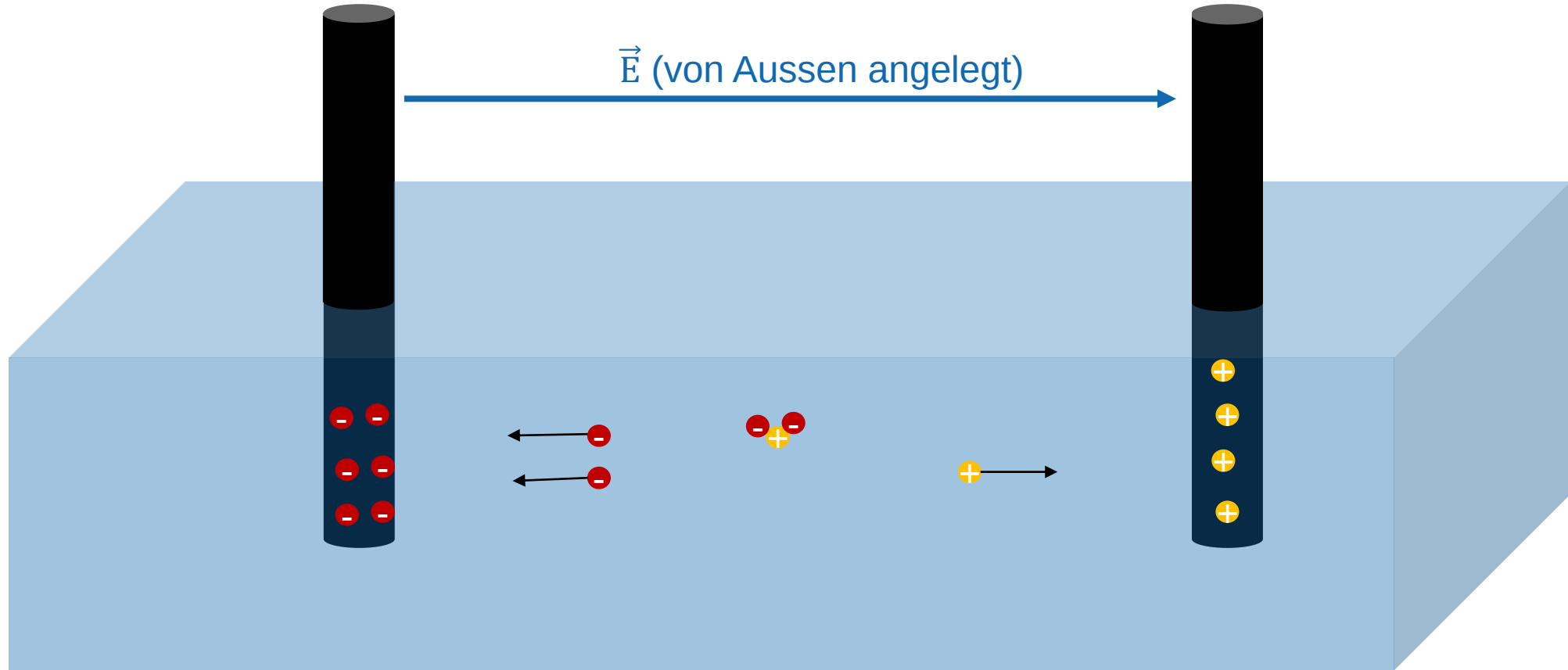
Stromleitung in Gasen (nicht behandelt)

Stromleitung in Flüssigkeiten

Halbleiter



Stromleitung in Flüssigkeiten

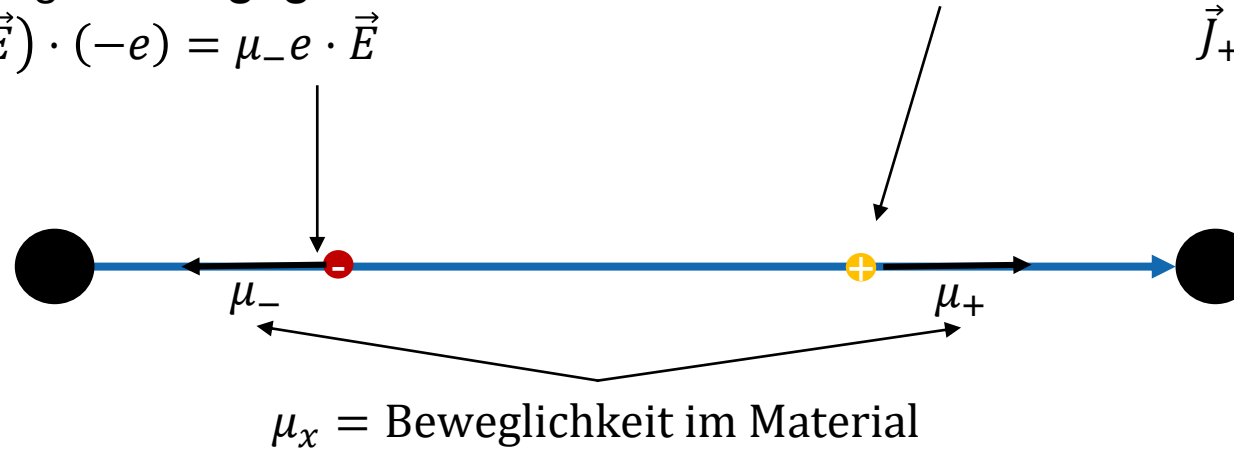


Negative Ladungen bewegen sich **gegen** das E-Feld

$$\vec{J}_- \propto \mu_- \cdot (-\vec{E}) \cdot (-e) = \mu_- e \cdot \vec{E}$$

Positive Ladungen bewegen sich **mit** dem E-Feld

$$\vec{J}_+ \propto \mu_+ e \cdot \vec{E}$$



$$\text{Strom } \vec{J} = \vec{J}_- + \vec{J}_+ = \eta z e (\mu_+ + \mu_-) \vec{E} = \kappa \cdot \vec{E}$$

Sowohl die Positiven wie die Negativen Ladungen tragen zum Stromfluss bei.

$$\kappa := \eta z e (\mu_+ + \mu_-)$$

1. Faraday'sche Gesetz

« Die Stoffmenge, die an einer Elektrode während der Elektrolyse abgeschieden wird, ist proportional zur elektrischen Ladung, die durch den Elektrolyten geschickt wird. »

$$m \propto Q = I \cdot t$$
$$m = \frac{A_r \cdot u}{z \cdot e} Q = \frac{A_r \cdot u}{z \cdot e} I \cdot t$$
$$n = \frac{Q}{z \cdot F}$$

A_r = Atomgewicht

z = Wertigkeit (Anzahl Elektronen die an Bindung beteiligt sind)

e = Elektronenladung

u = atomare Masse ($= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)

n = Anzahl Teilchen

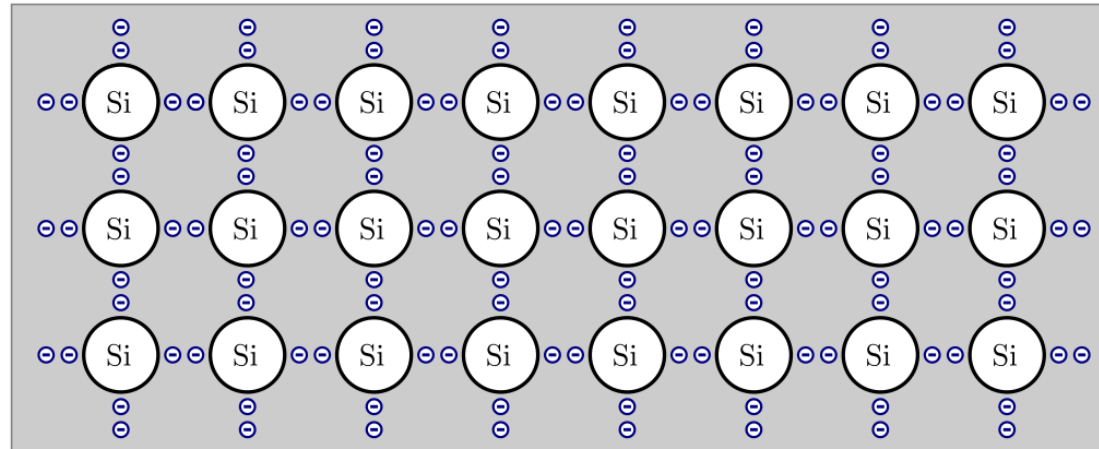
F = Faraday Konstante ($= 96'500 \text{ C/mol}$)

Halbleiter

Wie bewegen sich Ladungsträger in einem Material?

Reiner Halbleiter

Atome sind Gitterförmig angeordnet, wobei Elektronen als Bindeglied zwischen Atomen fungieren.



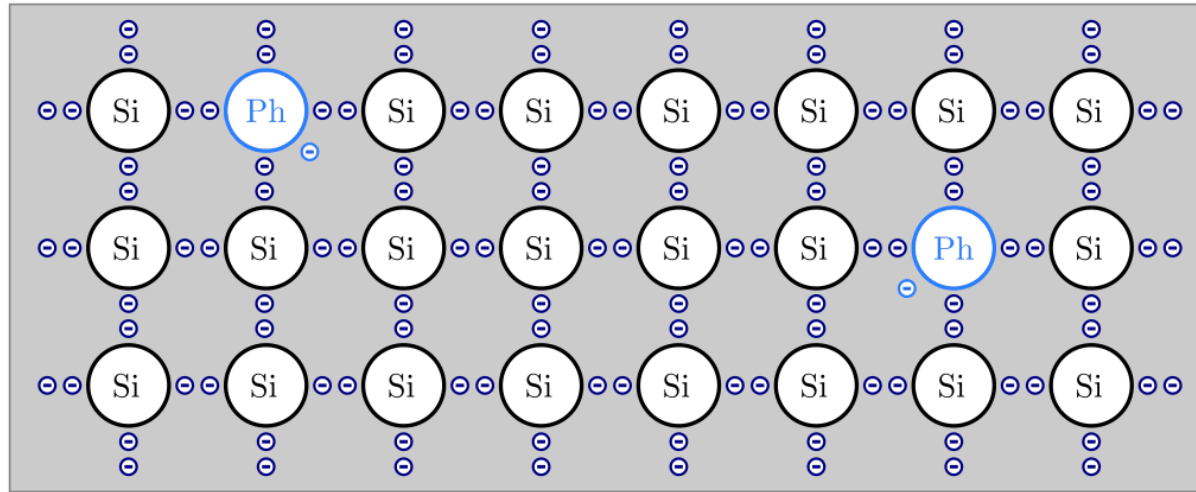
Um Strom zu leiten, muss ein Elektron aus der Bindung “geschlagen” werden

Reine Halbleiter sind sehr schlechte Leiter!

N-Dotierung (Negative Dotierung → Elektron)

Wir bringen ein Atom mit mehr Valenzelektronen als Si in das Material

Effekt: Es befindet sich nun ein **Elektron** im Material, welches nicht Teil einer **Bindung** ist

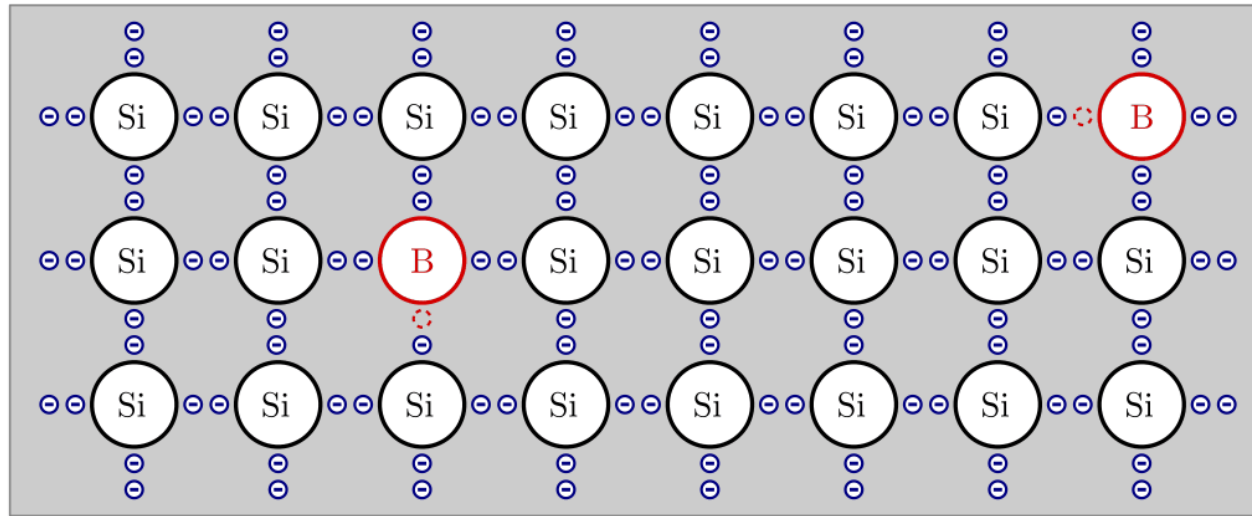


Diese Elektronen können sich sehr gut bewegen, wesshalb das Material nun **Leitfähig** ist.

P-Dotierung (Positive Dotierung → Kein Elektron)

Wir bringen ein Atom mit **weniger** Valenzelektronen als Si in das Material

Effekt: Es befindet sich nun ein **Loch** im Material, welches Teil einer **Bindung** ist



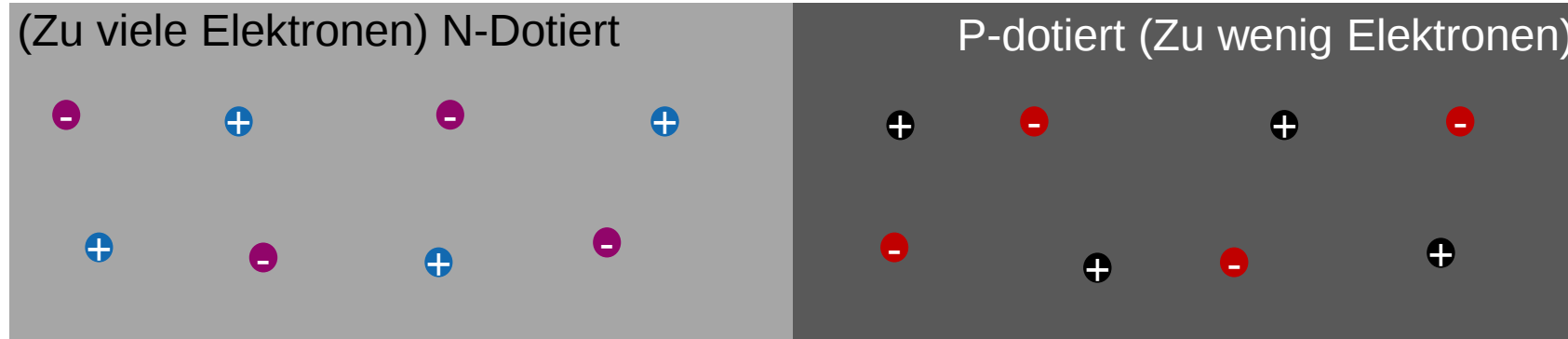
Die Löcher dienen als **freie Plätze** für Elektronen. Sie tragen zur Stromleitung bei.

Beispiel



Diode

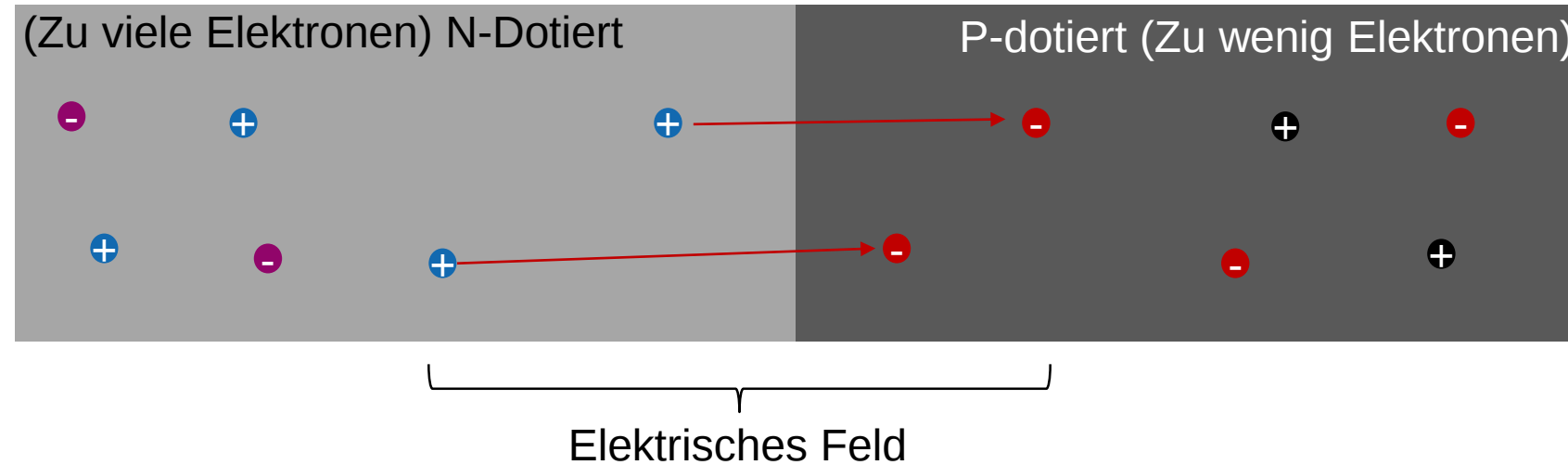
Bringen wir zwei verschieden Dotierte Halbleiter in Berührung, so entsteht ein elektrisches Feld



- Freie Elektronen
- Löcher
- Donator (= zum Bsp. Phosphor Atom mit zu vielen Valenzelektronen)
- Akzeptor (= zum Bsp. Bor Atom mit zu wenigen Valenzelektronen)

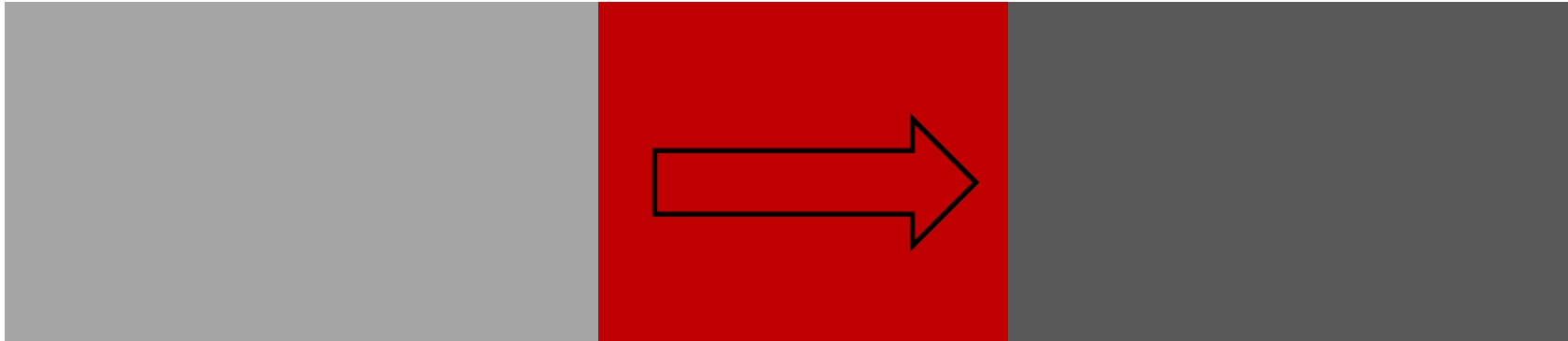
Diode

Bringen wir zwei verschieden Dotierte Halbleiter in Berührung, so entsteht ein elektrisches Feld



Diode

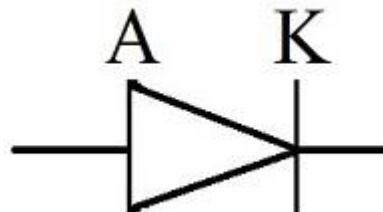
Bringen wir zwei verschieden Dotierte Halbleiter in Berührung, so entsteht ein elektrisches Feld



Dieses elektrische Feld hindert Elektronen daran, sich von links nach rechts zu bewegen. Elektronen können aber von Rechts nach Links fließen.

Dies entspricht einem elektrischem “**Ventil**”. Strom kann nur in Richtung des elektrischen Feldes fließen, nicht jedoch in die andere Richtung.

Schaltsymbol:



Netzwerke

Strom und Spannungsteiler

Stern-Dreieck Umformung

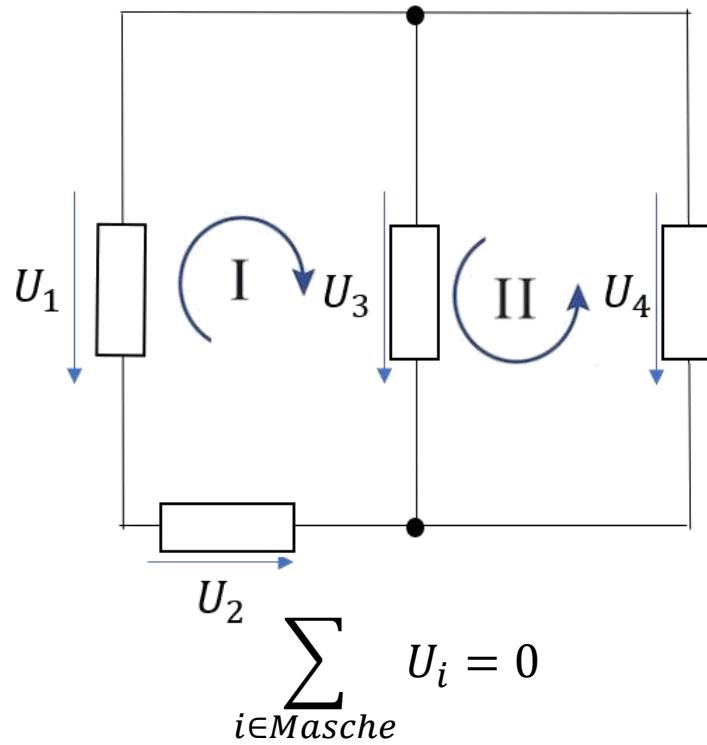
Superposition

Ersatzquellen

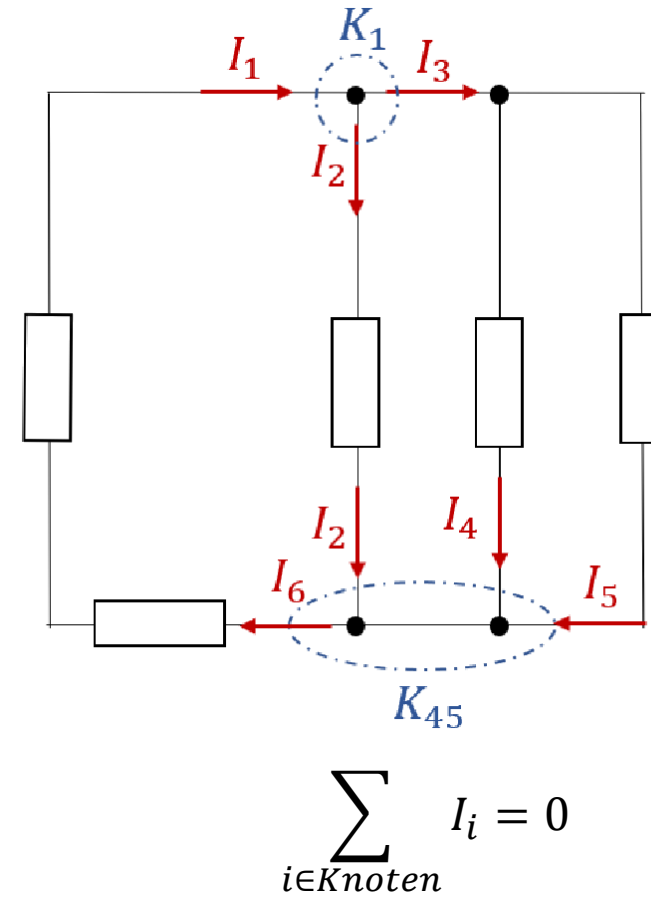
Leistungsanpassung

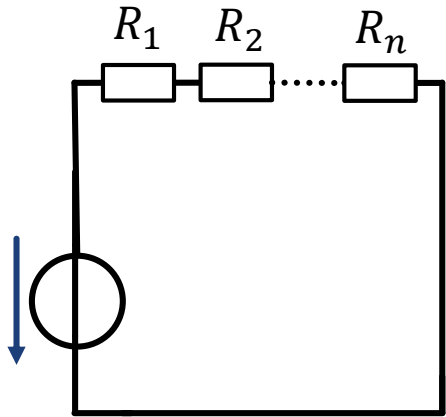


Maschenregel



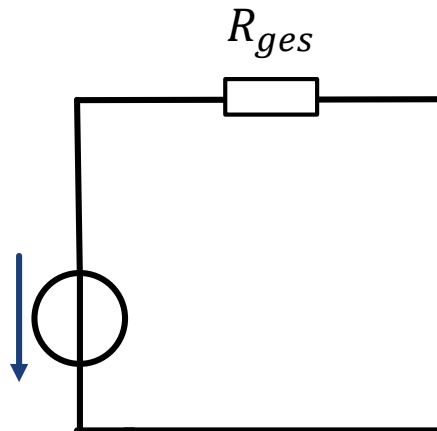
Knotenregel





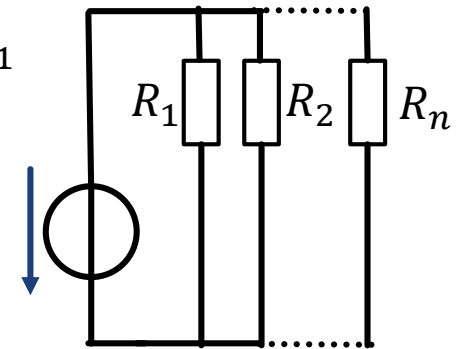
$$R_{ges} = \sum_i R_i$$

$$R_{ges} \geq \max\{R_1, \dots, R_n\}$$



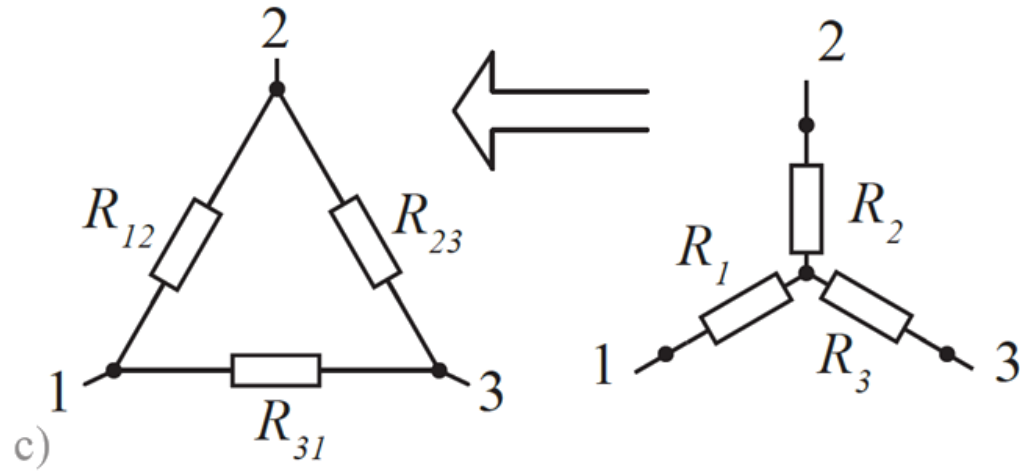
$$R_{ges} = (R_1 || \dots || R_n) = \left[\sum_i Y_i \right]^{-1}$$

Nur für 2 Widerstände! $= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$



$$R_{ges} \leq \min\{R_1, \dots, R_n\}$$

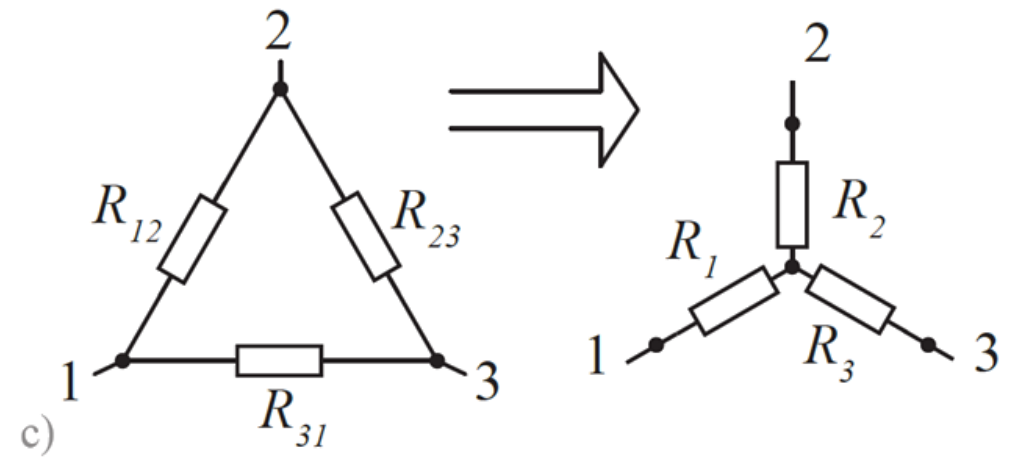




$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

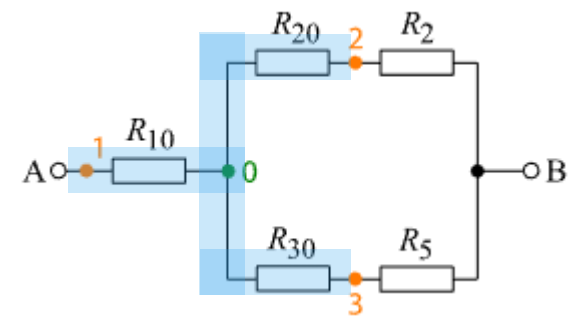
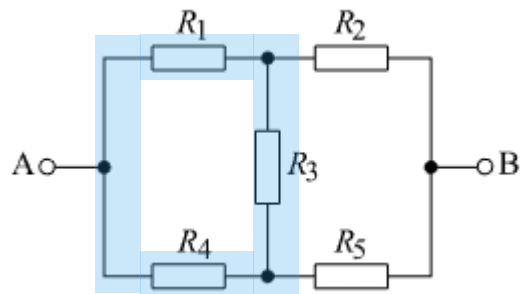
$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

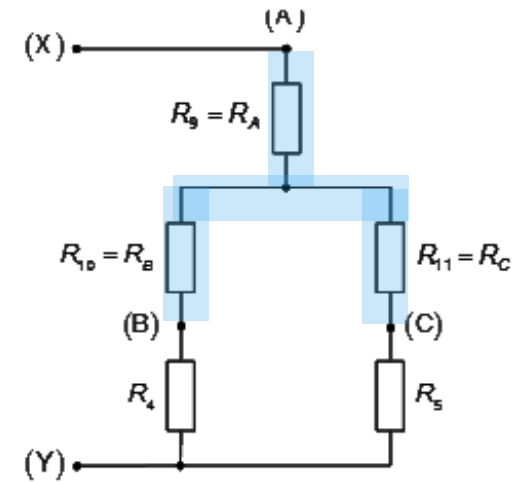
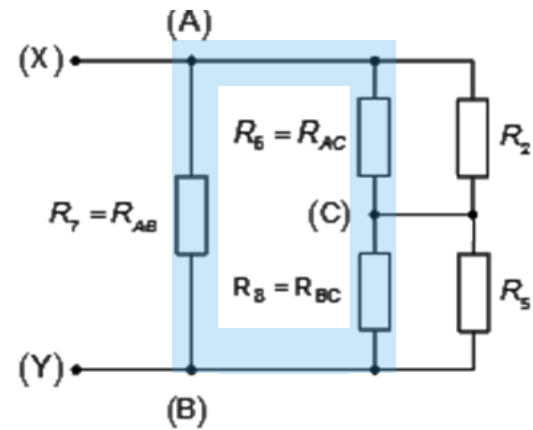
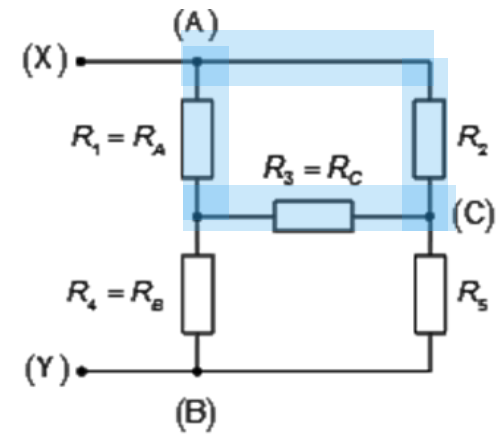
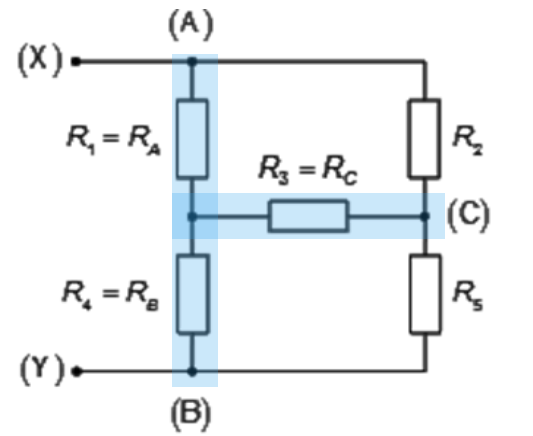


$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

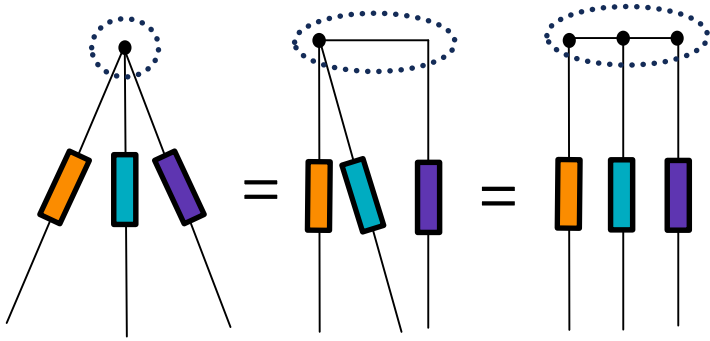
$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$



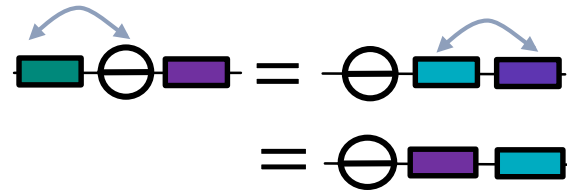


Knoten Expandieren

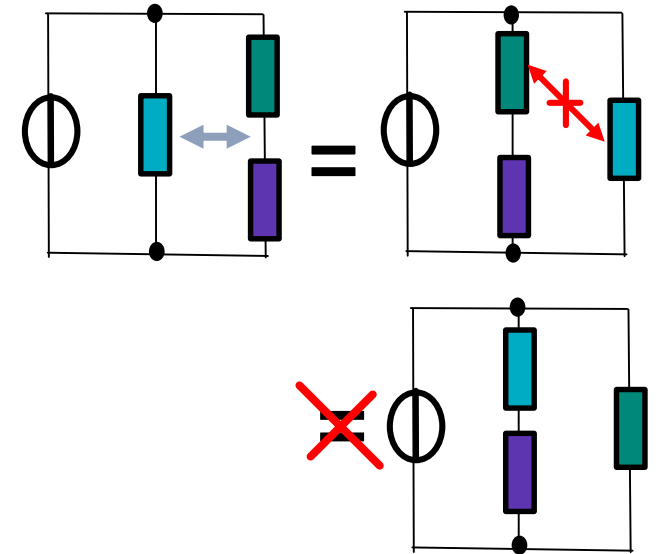


VERTAUSCHEN VON ELEMENTEN

SERIELL

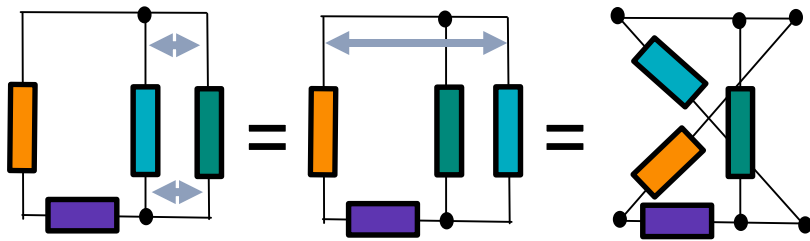


PARALLEL

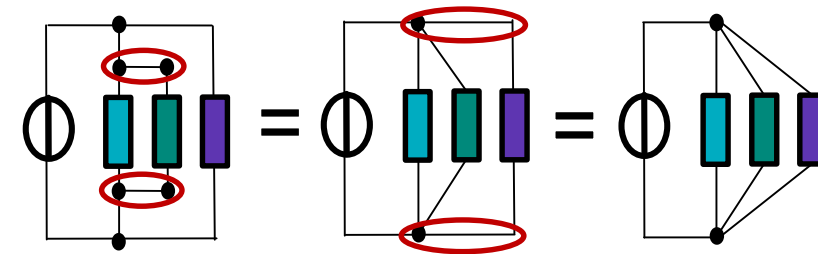


GRUNDREGELN

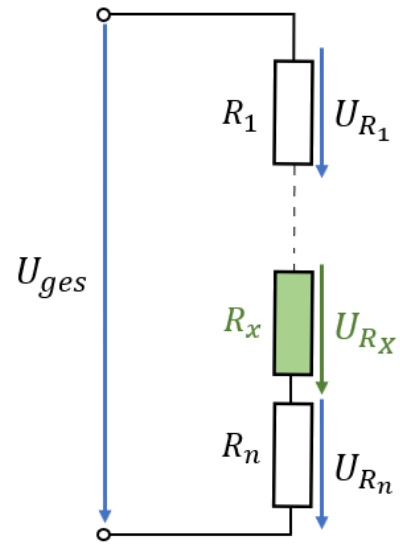
Verschieben



KNOTEN KONTRAHIEREN

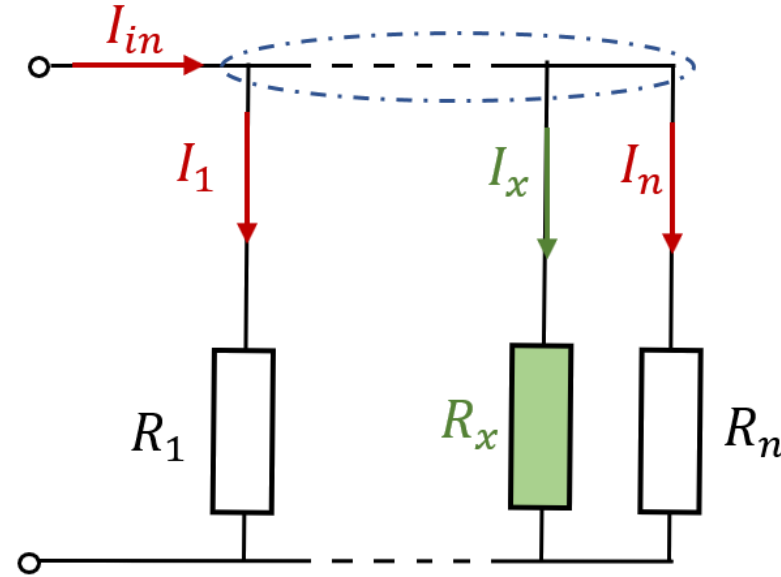


Spannungsteiler



$$U_{Rx} = U_{ges} \frac{R_x}{\sum R_i}$$

STROMTEILER



$$I_x = I_{in} \frac{(R_1 || \dots || R_n)}{R_x}$$

$$= I_{in} \frac{R_1}{R_x + R_1}$$

Beispiel Spannungsteiler:

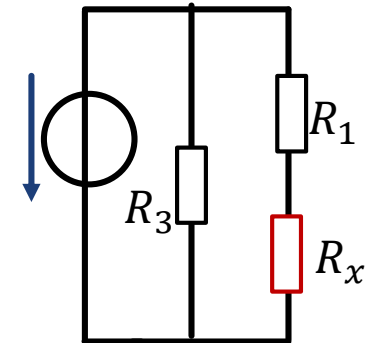
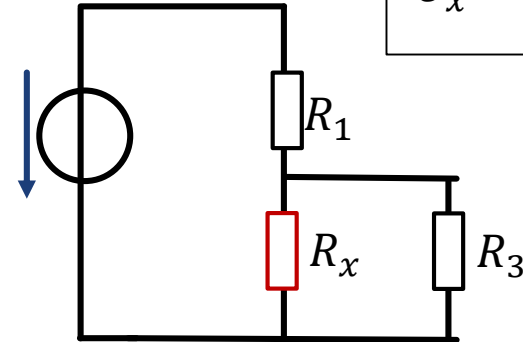
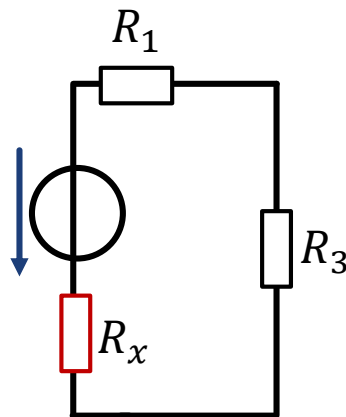
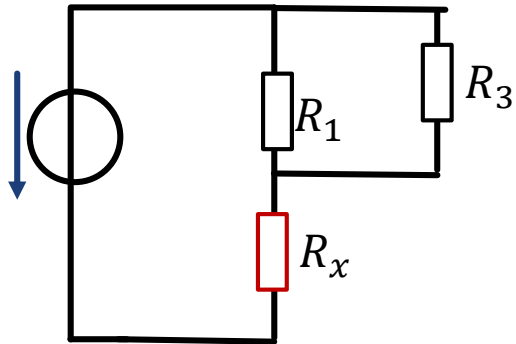
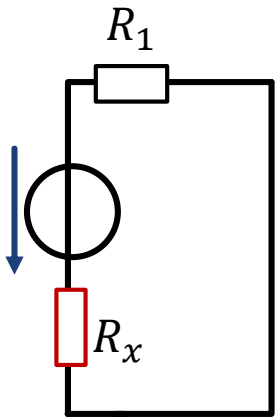
$$U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_1 + R_x}$$

$$U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_x + (R_1 || R_3)}$$

$$U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_1 + R_x}$$

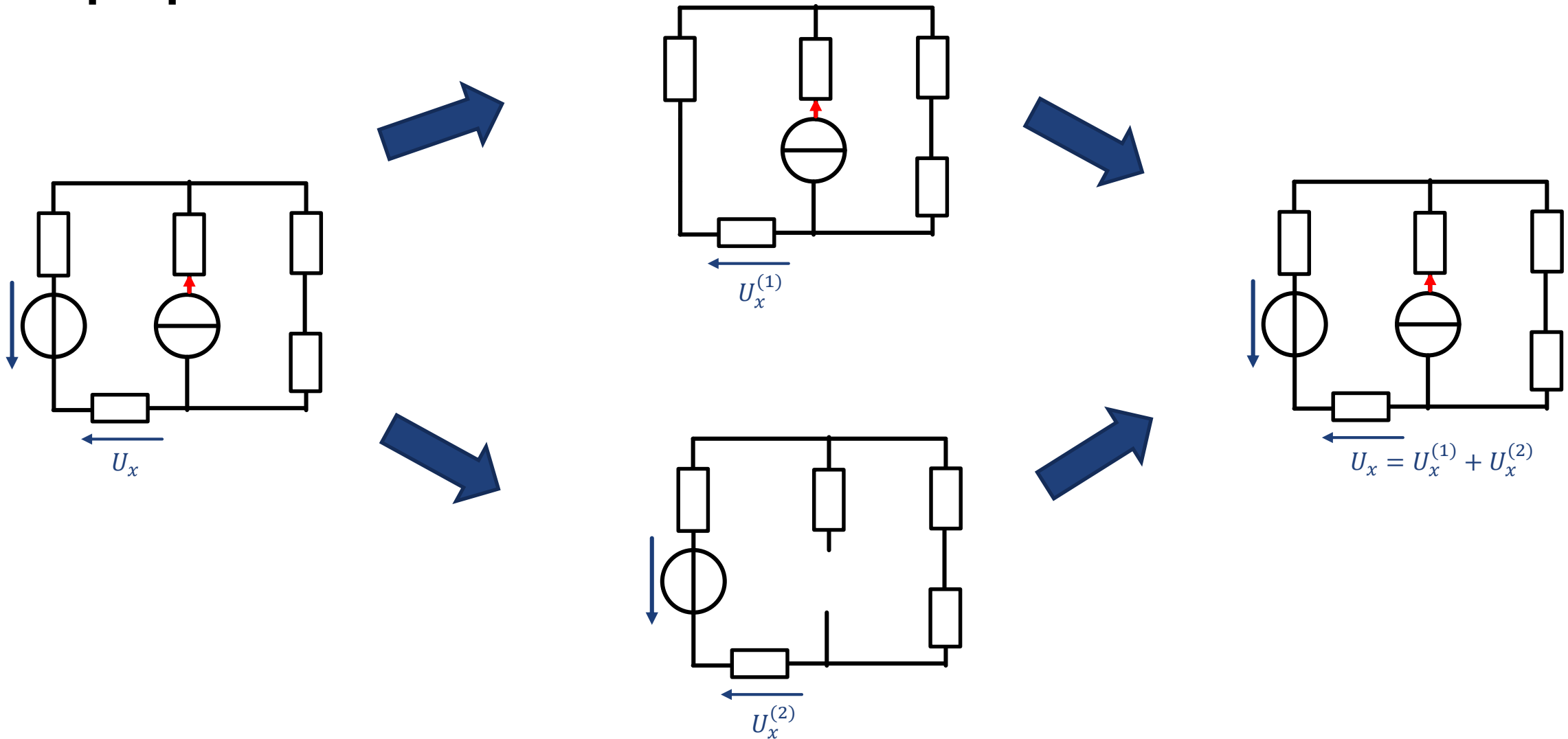
$$U_x = U \cdot \frac{R_x}{R_1 + R_x + R_3}$$

$$U_x = U \cdot \frac{(R_x || R_3)}{R_1 + (R_x || R_3)}$$

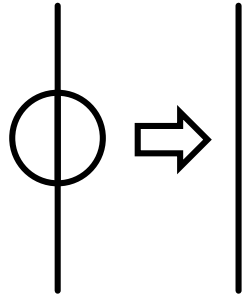


Lösung Spannungsteiler:

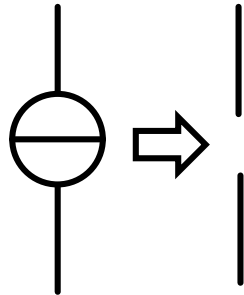
Superposition



Quellen zu «Null» setzen



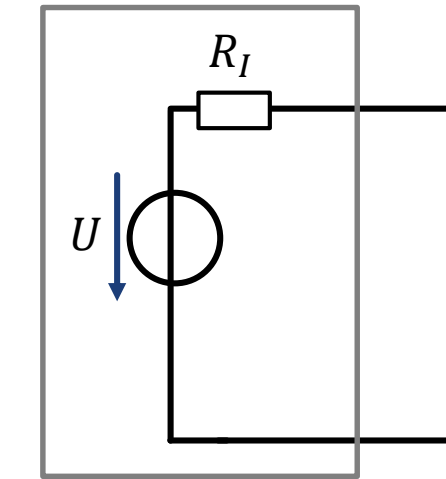
«Über einem Kurzschluss kann keine Spannung abfallen»



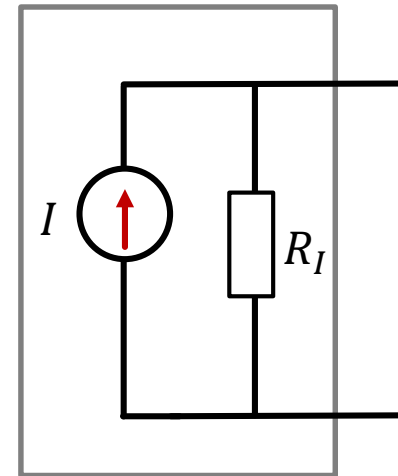
«Durch einen Leerlauf kann kein Strom fließen»

Reale Quellen

Reale Quellen besitzen einen Innenwiderstand



Reale
Spannungsquelle

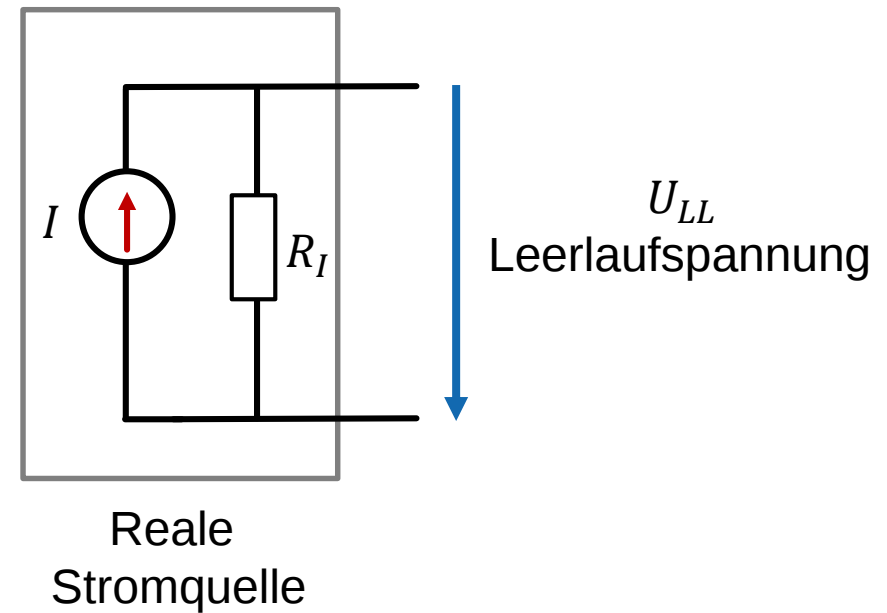
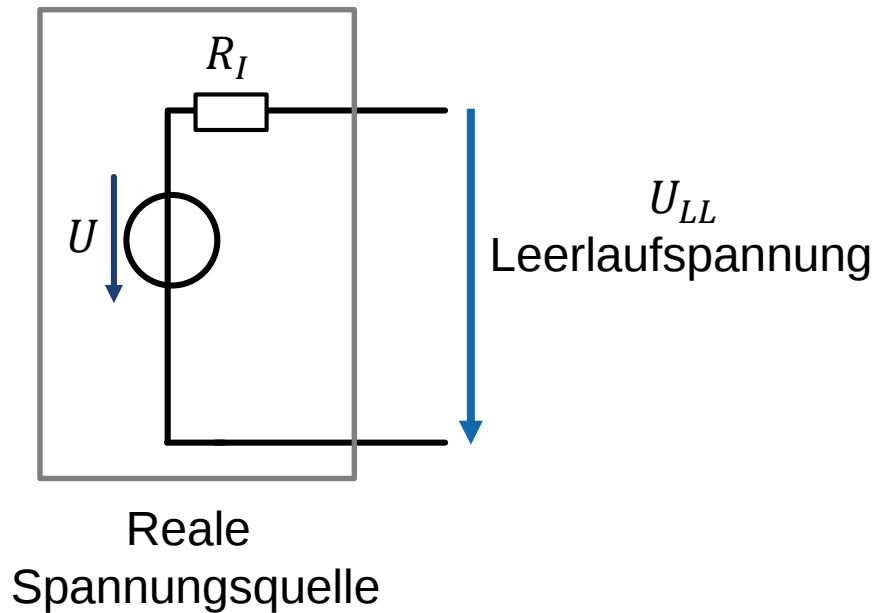


Reale
Stromquelle

Reale Quellen

Wie können wir eine Quelle beschreiben?

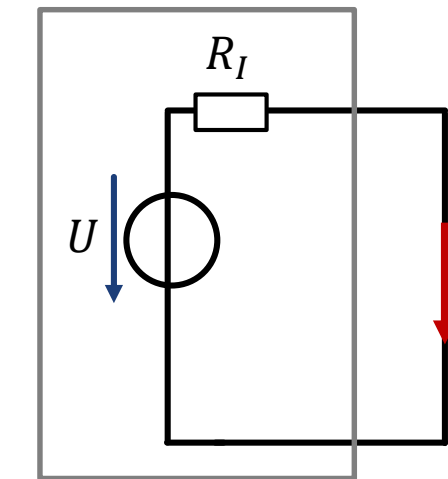
Leerlaufspannung: Wir messen die Spannung, welche an den Anschlüssen abfällt



Reale Quellen

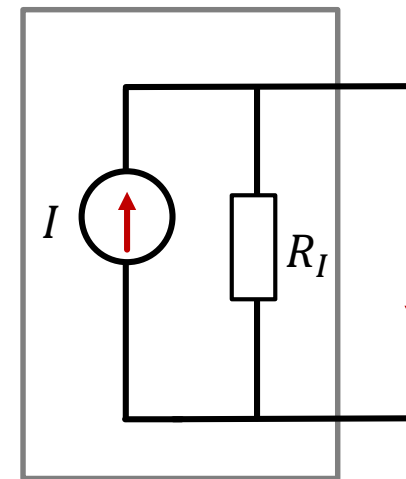
Wie können wir eine Quelle beschreiben?

Kurzschlussstrom: Wir messen den Strom, welcher fließt, wenn die Anschlüsse kurzgeschlossen sind



Reale
Spannungsquelle

I_{KS}
Kurzschlussstrom



Reale
Stromquelle

I_{KS}
Kurzschlussstrom

Reale Quellen



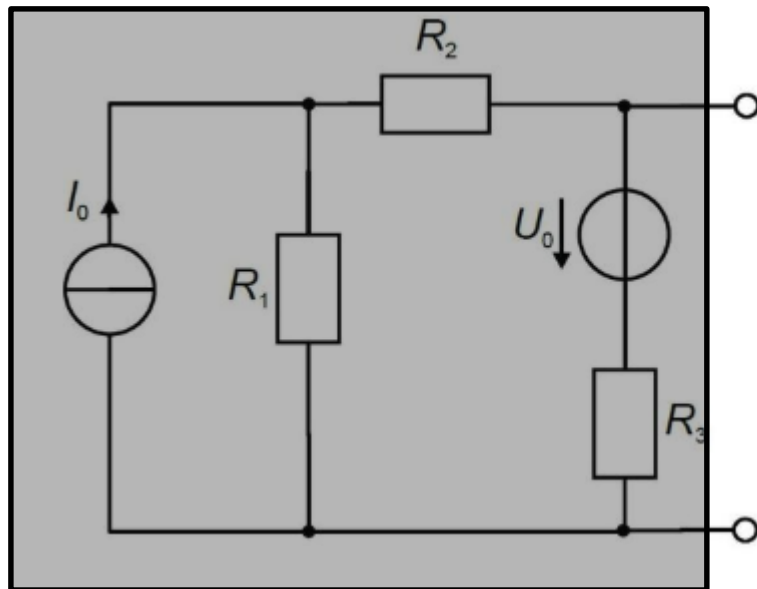
12 V, 560 A, 60 Ah

Leerlaufspannung

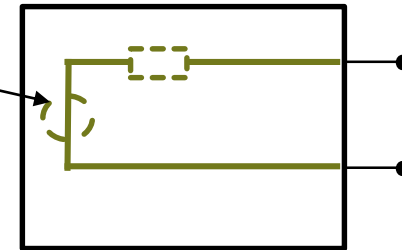
Kurzschlussstrom

Theorem von Norton und Thévenin

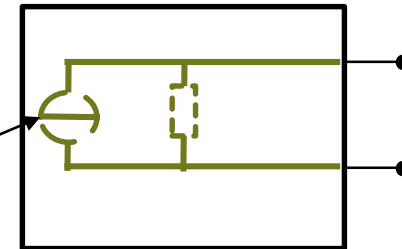
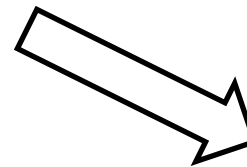
Jedes Netzwerk, dass aus linearen Bauteilen besteht und 2 Klemmen besitzt, lässt sich als reale Quelle darstellen.



Leerlaufspannung



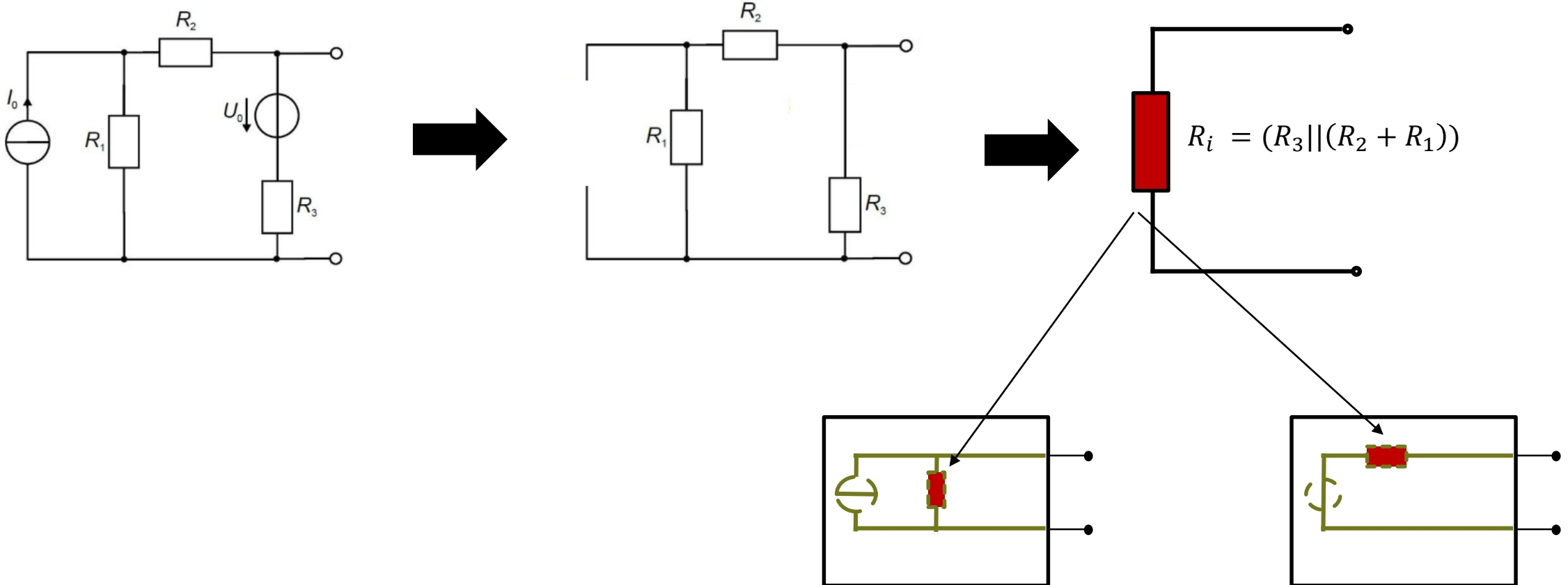
Théveninäquivalent:
Darstellung als Spannungsquelle



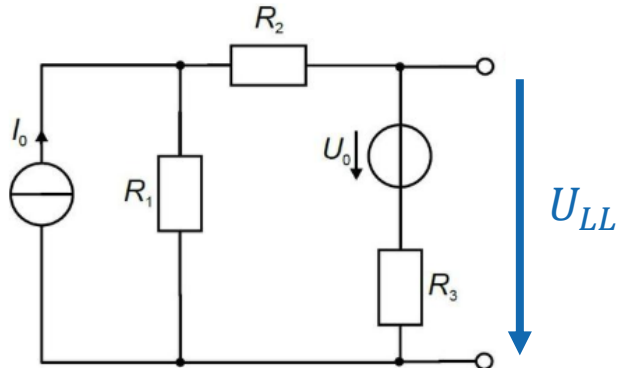
Kurzschlussstrom

Berechnung des Innenwiderstandes

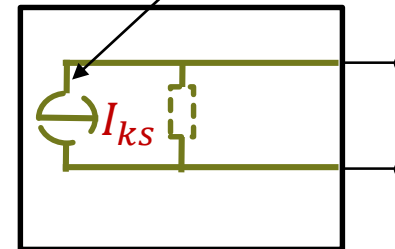
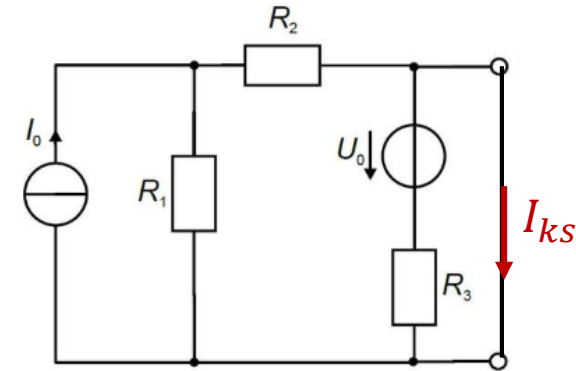
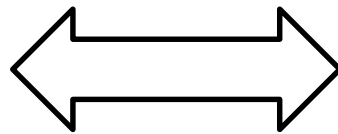
1. Setze alle Quellen zu 0
2. Forme Netzwerk solange um, bis nur noch ein Widerstand zwischen den Klemmen vorhanden ist



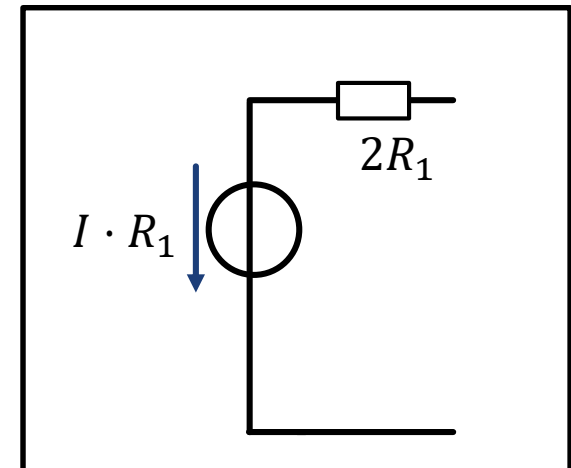
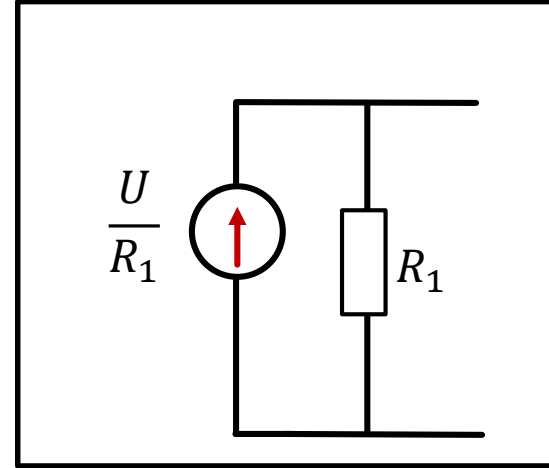
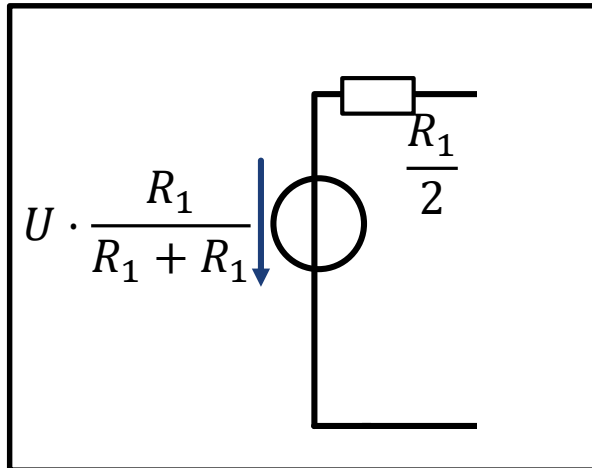
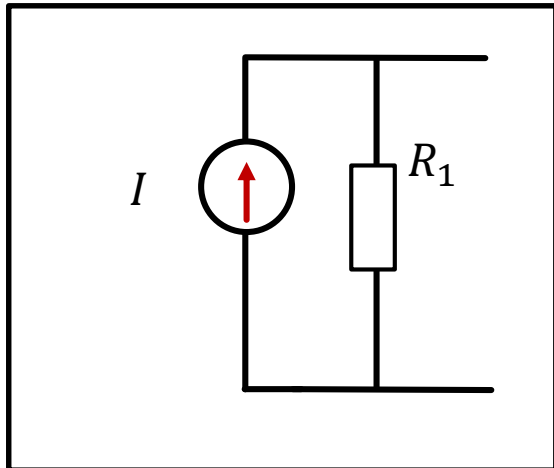
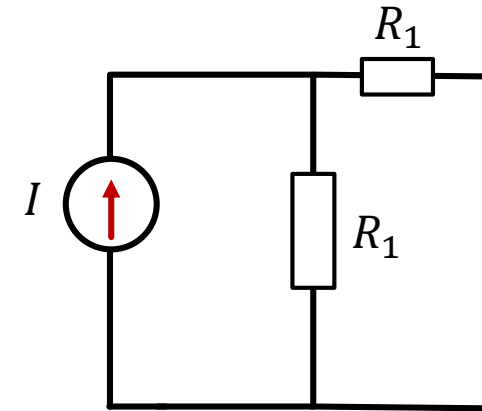
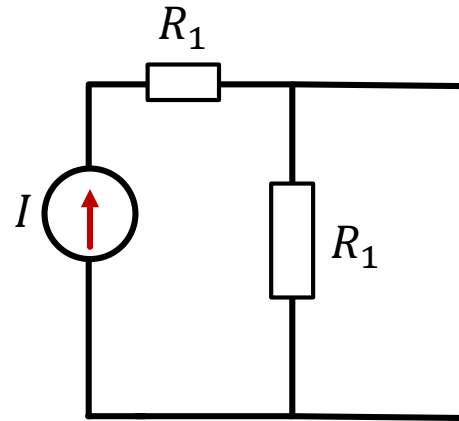
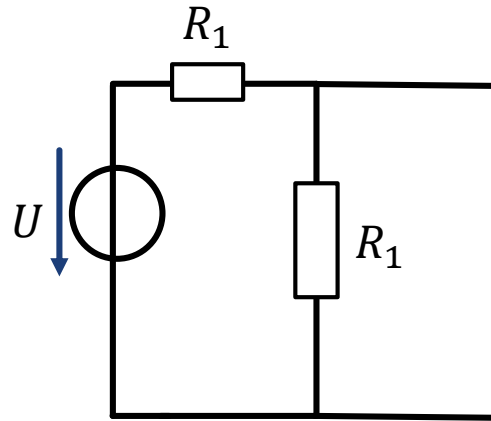
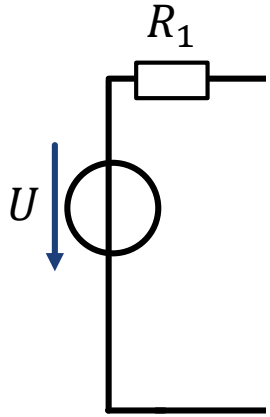
Berechnung der Leerlaufspannung / Kurzschlussstrom

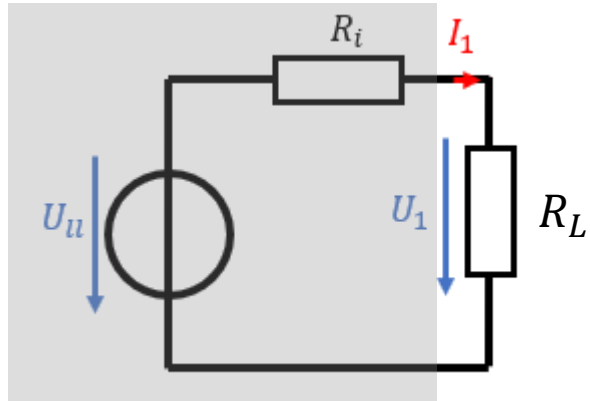


$$U_{LL} = R_I \cdot I_{ks}$$

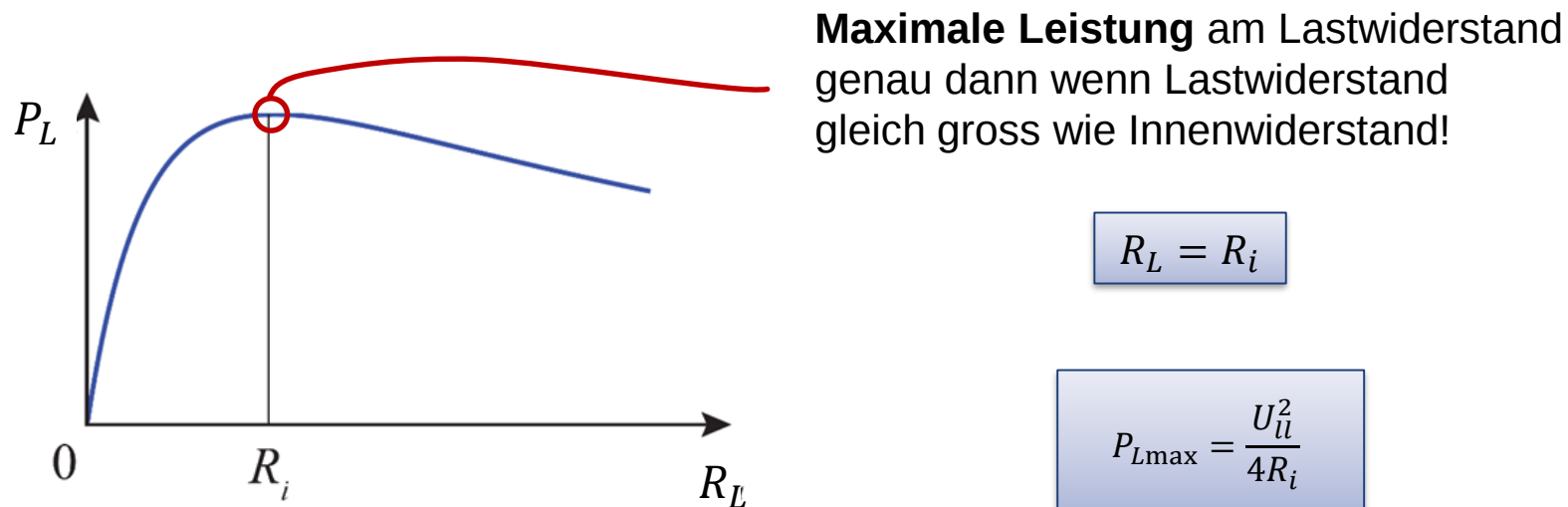


Beispiel





$$P_L = U_1 I_1 = \frac{U_1^2}{R_L} = \frac{\left(U_0 \frac{R_L}{R_L + R_i} \right)^2}{R_L} = U_0^2 \frac{R_L}{(R_L + R_i)^2}$$



$$R_L = R_i$$

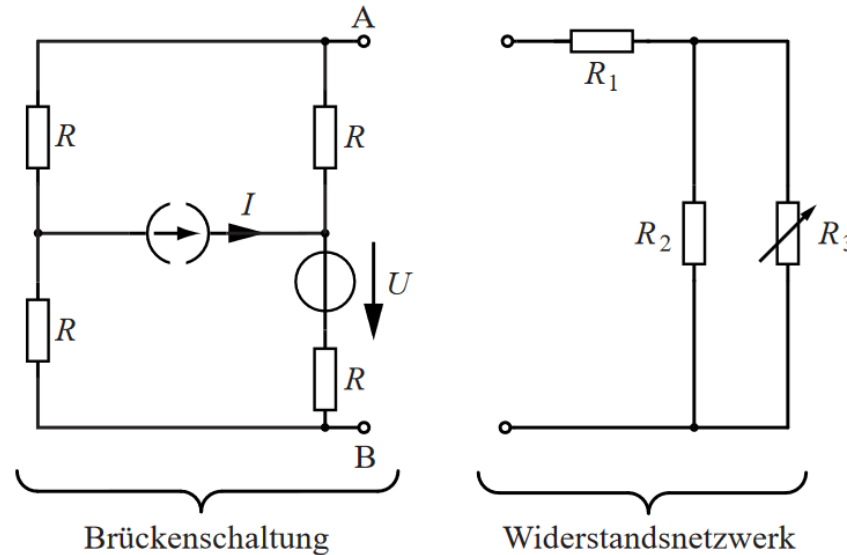
$$P_{L\max} = \frac{U_0^2}{4R_i}$$

Aufgabe

Aufgabe NUS I-2: Brückenschaltung

20 Punkte

Gegeben ist eine DC-Brückenschaltung gemäss **Fig. 2** bestehend aus vier Widerständen $R = 15\ \Omega$, der Spannungsquelle $U = 12\text{ V}$ und der Stromquelle $I = 1\text{ A}$. An den Klemmen A und B der Brückenschaltung kann ein Widerstandsnetzwerk, das aus den beiden Widerständen $R_1 = 390\ \Omega$, $R_2 = 1.2\text{ k}\Omega$ und dem einstellbaren Lastwiderstand R_3 besteht, angeschlossen werden.



Zusatzaufgabe

Aufgabe NUS I-3: Temperaturmessung

20 Punkte

Mit der in **Fig. 3** dargestellten Brückenschaltung soll ein Temperaturmessgerät aufgebaut werden. Zur Anzeige wird ein Spannungsmessinstrument verwendet, das die Brückenspannung U_m abgreift. Für das Spannungsmessinstrument kann ein unendlicher Innenwiderstand angenommen werden. Die Temperaturmessung soll in einem Bereich von -20 °C bis 50 °C einsetzbar sein. Als Temperatursensor wird ein temperaturabhängiger Widerstand $R(\vartheta)$ eingesetzt, dessen Widerstands Temperatur Kennlinie durch

$$R(\vartheta) = R_0(1 + \alpha(\vartheta - \vartheta_0))$$

mit den Parametern

$R_0 = 1\text{ k}\Omega$	Widerstand bei ϑ_0
$\vartheta_0 = 20\text{ °C}$	Referenztemperatur
$\alpha = 5 \cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$	Temperaturkoeffizient

beschreiben wird. Ausserdem gilt $R_1 = 1\text{ k}\Omega$.

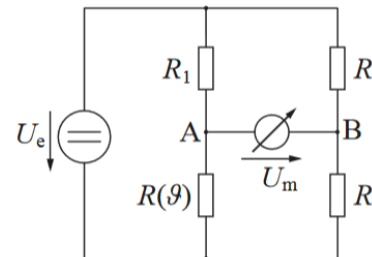


Fig. 3: Brückenschaltung zur Temperaturmessung.