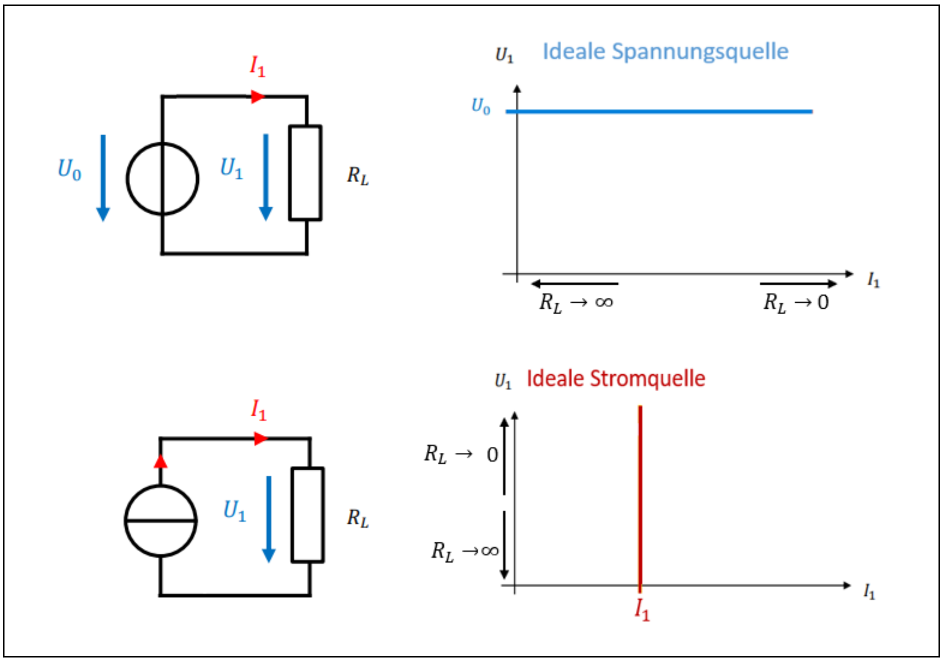
1 Analyse von Gleichstromnetzwerke

1.1 Quellen

Definition **Ideale Quelle**

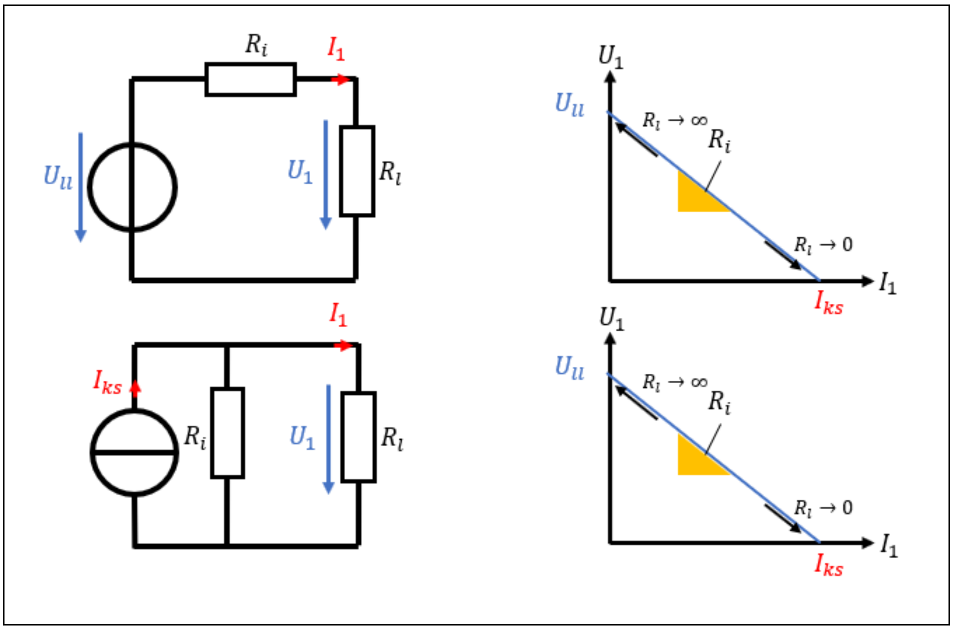
Eine ideale Strom/Spannungsquelle liefert immer denselben Strom / Spannung unabhängig von der Last, welche angehängt wird.



Mit idealen Strom/Spannungsquellen können wir theoretisch unendlich viel Spannung/Strom über einem Lastwiderstand erzeugen.
(Beispiel Ideale Spannungsquelle im Kurzschluss / Ideale Stromquelle im Leerlauf)
Bei einer Realen Quelle kann jedoch nur eine endliche Spannung / Strom auftreten, wesshalb wir Verluste innerhalb der Quelle mit einem Innenwiderstand R_i modellieren.

Definition **Reale Quelle**

Eine Reale Quelle bezeichnet eine Ideale Quelle mit Vorwiderstand.
Bei einer **Stromquelle** ist der Widerstand **parallel**, bei einer **Spannungsquelle** ist der Widerstand in **Serie**.



1.2 Leistungsanpassung

Definition **Leistung**

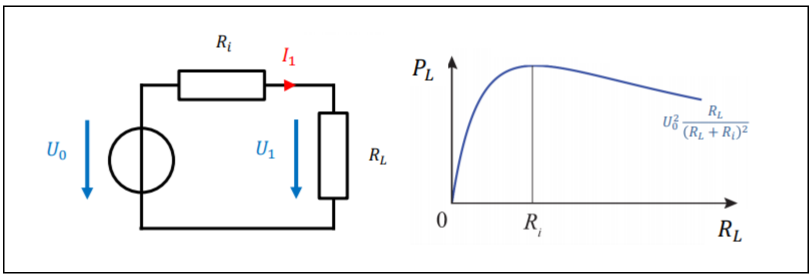
Als Leistung bezeichnen wir das Produkt von Strom und Spannung.
Sie bezeichnet die in einer Zeitspanne umgesetzte Energie an einem Bauteil.

$$P := U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

Definition **Maximale Leistung**

Um bei einer realen Quelle maximale Leistung an einen Lastwiderstand abzugeben, muss der Lastwiderstand gleich gross sein wie der Innenwiderstand der Quelle.

$$R_i = R_L \Rightarrow P = P_{max}$$



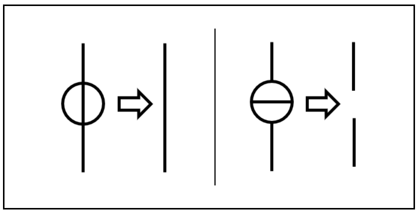
Begründung
Die Leistung an einem Lastwiderstand in Serie ist gegeben als:

$$P_L = U_L \cdot I_L = \frac{U_L^2}{R_L} = \frac{(U_0 \frac{R_L}{R_L+R_i})^2}{R_L} = U_o^2 \cdot \frac{R_L}{(R_L+R_i)^2}$$

$$\frac{d}{dR_L}(P_L) = -U_0^2 \cdot \frac{R_L - R_i}{(R+R_L)^3} = 0 \Rightarrow R_L = R_i \Rightarrow P_L = P_{max}$$

1.3 Superpositionsprinzip

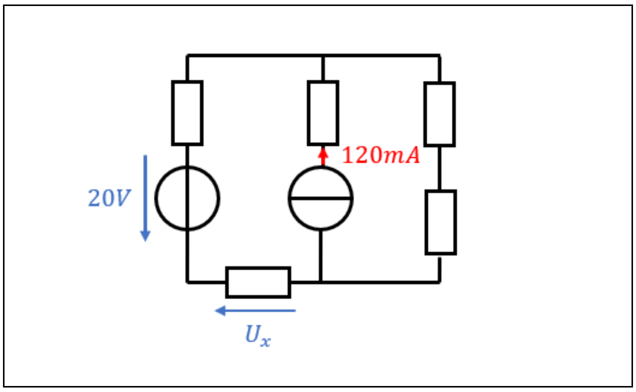
Das Superpositionsprinzip besagt, dass wir bei einem Netzwerk mit mehreren Quellen einzelne Teillösungen in Abhängigkeit von nur einer Quelle berechnen und aufsummieren können.
Dies gilt jedoch nicht für die Leistung, da diese nicht linear ist!
Um das Superpositionsprinzip anzuwenden, müssen wir alle ausser eine Quelle auf "0" setzen.
Spannungsquellen werden also mit **Kurzschlüssen** ersetzt und Stromquellen mit **Leerläufen**.



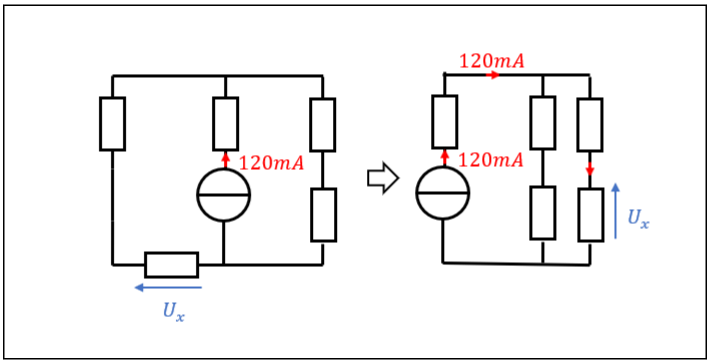
Wieso
Eine Spannungsquelle zu "0" setzen bedeutet, dass über diesem Bauteil keine Spannung abfallen darf. Über einem Kurzschluss wird nie eine Spannung abfallen, da dieser als Widerstand mit Wert 0 modelliert werden kann.
Eine Stromquelle zu "0" zu setzen bedeutet, dass durch dieses Bauteil kein Strom fliessen darf. Dies entspricht gerade einem Leerlauf, da dieser als Widerstand mit Wert $\to \infty$ modelliert werden kann.

Beispiel #2

Aufgabe Berechnen sie die Spannung U_x und die Leistung P_x im folgenden Netzwerk wenn alle Widerstände $R = 100\Omega$ betragen.

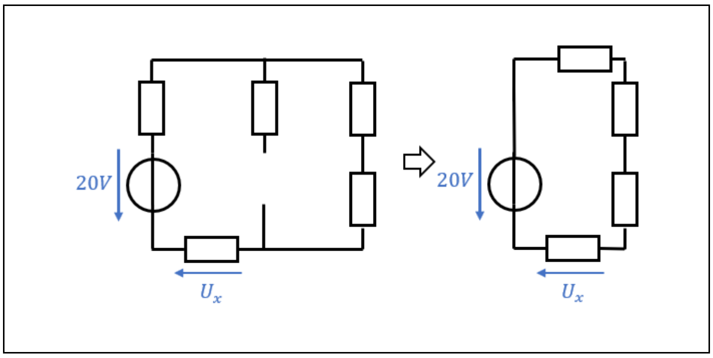


Lösung
Zuerst setzen wir die Spannungsquelle auf 0 und erhalten das folgende ESB



Nun berechnen wir den Strom I_{x_1} durch den Widerstand mit der Spannung U_x mithilfe eines Stromteiler:
$I_{x_1} = 120mA \cdot \frac{200\Omega}{200\Omega+200\Omega} = 60mA$
Die Spannung U_x ist entgegen der Stromrichtung eingezeichnet:
$U_{x_1} = -R_x \cdot I_x = -100 \cdot 60mA = -6V$

Nun setzen wir die Stromquelle zu 0:



Die Spannung U_{x_2} berechnet sich als Spannungsteiler:
$U_{x_2} = 20V \cdot \frac{100\Omega}{400\Omega} = 5V$, $I_{x_2} = \frac{5V}{100\Omega} = 50mA$

Schlussendlich berechnet sich die Spannung als Summe der Teilspannungen:
$U_x = U_{x_1} + U_{x_2} = 5V - 6V = -1V$
Und die Leistung:
$P_x = \frac{{U_x}^2}{R_x} = 1mW$
Welche **nicht** der Summe der Teilleistungen entspricht:
$P_{sum} = P_1 + P_2 = U_{x_1} \cdot I_{x_1} + U_{x_2} \cdot I_{x_2} = 360mW + 250mW = 610mW$

1.4 Analyse umfangreicher Netzwerke

Möchten wir in Netzwerken sehr viele Grössen berechnen, oder ist das Netzwerk sehr komplex, so können andere (meist Computer basierende) Verfahren verwendet.
Sämtliche Verfahren bauen darauf auf, dass für ein beliebiges Netzwerk das Aufstellen sämtlicher Konten und Maschengleichungen genügt, um alle gesuchten Grössen zu berechnen.

Unabhängige Gleichungen

Seien z die Anzahl Zweige eines Netzwerkes und k die Anzahl Knoten, so müssen z linear unabhängige Gleichungen gefunden werden, um alle Grössen im Netzwerk zu berechnen.
Die Gleichungen können folgendermassen gefunden werden:

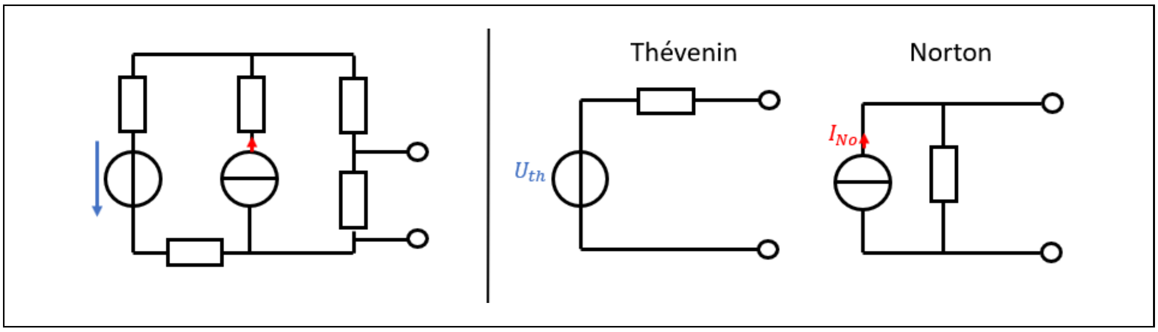
(k-1) Gleichungen können aus Knotengleichungen gefunden werden.
(z - (k-1)) übrige Gleichungen werden mithilfe von Maschengleichungen gefunden.

Vorgehen - Analyse von Umfangreichen Netzwerke

- Entferne alle Widerstände und Quellen und zeichne das Schaltbild neu.
- Nummeriere alle Konten. Die Anzahl der Knoten wird mit k bezeichnet.
- Alle Verbindungslinien, welche zwei Knoten verbinden, werden als Zweige bezeichnet. #Zweige = z
- Definiere Ströme für jeden Zweig und stelle (k-1) Knotengleichungen auf. Schreibe diese am Besten bereits in Matrix schreibweise:
  Bsp: $I_1 + I_2 = I_3, I_3 - I_4 = 2A$:
  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \end{bmatrix}$$
- Finde z - (k-1) Unabhängige Maschengleichungen. (Mittels Vollständiger Baum / Auftrennen der Maschen)
- Ersetze die Spannungen der Maschengleichung mit Strom mal Widerstand und ergänze das Gleichungssystem.
  Bsp: $U_1 + U_2 = 5V, U_2 - U_3 = U_4$
  $\rightarrow R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = 5V, R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_4 \cdot I_4 = 0$
  $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \mathbf{R_1} & \mathbf{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R_2} & -\mathbf{R_3} & -\mathbf{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2A \\ \mathbf{5V} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

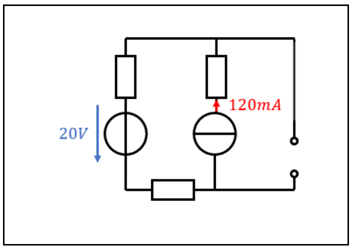
Definition **Thévenin / Norton Äquivalent**

Jedes Netzwerk mit **linearen** Bauelementen und 2 Klemmen lässt sich als Reale Quelle darstellen.
Thévenin Äquivalent Darstellung als Reale **Spannungsquelle** mit Leerlaufspannung die an den Klemmen auftritt
Norton Äquivalent Darstellung als Reale **Stromquelle** mit Kurzschlussstrom der an den Klemmen auftritt
Der Innenwiderstand entspricht dem von Außen gemessen Widerstand wenn alle Quellen zu 0 gesetzt werden.



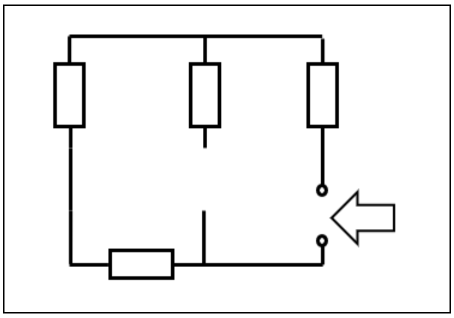
Beispiel **#3 - Thévenin Äquivalente Schaltung**

Aufgabe
Geben sie eine Thévenin Äquivalente Schaltung (Innenwiderstand R_i, U_{Th}) für folgende Klemmen an. Alle Widerstände haben Wert 100Ω



Lösung
Zuerst berechnen wir die Leerlaufspannung für die Stromquelle:
$U_{LL_1} = 120mA \cdot (100\Omega + 100\Omega) = 24V$, da der Widerstand über den Klemmen gemäss Maschenregel auch über den 2 Widerständen abfällt
Danach die Leerlaufspannung für die Spannungsquelle:
$U_{LL_2} = 20V$, da kein Strom fliessen kann und somit die ganze Spannung über dem Leerlauf abfällt.
Die Gesamtspannung und somit die Spannung der Ersatzspannungsquelle beträgt:
$\underline{\underline{U_{Th}}} = U_{LL_1} + U_{LL_2} = \underline{\underline{44V}}$

Nun müssen wir noch den Innenwiderstand berechnen. Dazu setzen wir alle Quellen zu 0 und berechnen den von Aussen gemessenen Widerstand:



$\underline{\underline{R_i}} = 100\Omega + 100\Omega + 100\Omega = \underline{\underline{300\Omega}}$