- (falls Zeit) Aufgabe 5.5 aus Übungsbuch Albach

Aufgabe 5.5 | Kraftberechnung im Magnetfeld

Die im Querschnitt dargestellte Leiteranordnung ist in z-Richtung unendlich ausgedehnt. An den Stellen x = $-a$ und x = a befinden sich zwei Linienleiter, die von den Gleichströmen $I_1 = I/2$ und $I_2 = I/2$ mit der im Bild angegebenen Orientierung durchflossen werden. Der Rückleiter besteht aus einem Hohlzylinder mit dem Radius b und einer vernachlässigbar kleinen Wandstärke. Er wird von dem über den Querschnitt des Rückleiters homogen verteilten Gleichstrom $I_3 = -I$ durchflossen.

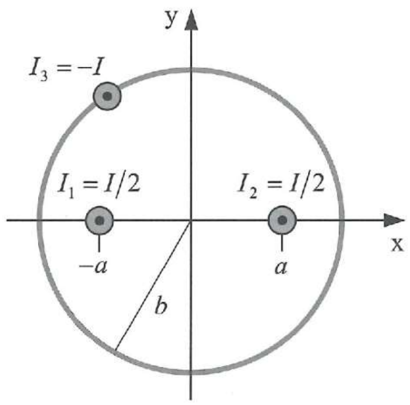

Abbildung 1: Leiteranordnung

1. Bestimmen Sie das magnetische Feld $\mathbf{H}$(x,y) im gesamten Raum, indem Sie die Beiträge der einzelnen Leiter überlagern.
2. Welche auf die Länge l bezogene Kraft $\mathbf{F}$ wirkt auf den bei x = $-a$ befindlichen Linienleiter?

Lösung zur Teilaufgabe 1:

Die Feldstärke eines an der Stelle (x_Q, y_Q) befindlichen Linienleiters haben wir bereits in Aufgabe 5.1 berechnet. Das Feld infolge der beiden an den Stellen $(-a,0)$ und $(a,0)$ befindlichen Linienleiter erhalten wir durch Überlagerung der beiden Beiträge

$$\mathbf{H}_1(x,y) + \mathbf{H}_2(x,y) = \frac{I}{4\pi}\left[\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2}\right].$$

Der Strom I_3 ist als Strombelag konzentrisch um den Ursprung verteilt. Die zugehörige magnetische Feldstärke $\mathbf{H}_3$ ist also φ-gerichtet und hängt nur von der Koordinate ρ ab. Aus dem Oersted'schen Gesetz folgt für das Feld des Rückleiters

$$\oint_C \vec{\mathbf{H}}_3 \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} H_3(\rho)\underbrace{\vec{\mathbf{e}}_\varphi \cdot \vec{\mathbf{e}}_\varphi}_{=1}\rho\, d\varphi = 2\pi\rho H_3(\rho) = \Theta = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le \rho < b \\ -I & \phantom{\text{für}} \quad \rho > b \end{cases},$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{cases} \mathbf{0} & 0 \le \rho < b \\ \mathbf{e}_\varphi \dfrac{-I}{2\pi\rho} = \dfrac{-I}{2\pi}\dfrac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x}{x^2 + y^2} \quad \text{für} & \rho > b \end{cases}.$$

Diese Feldstärke entspricht für $\rho > b$ dem Feld eines Linienleiters $-I$ im Ursprung. Damit ergibt sich nach Überlagerung der Einzelfelder das gesamte Feld in den Bereichen.

Innenbereich $0 \le \rho < b$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \frac{I}{4\pi}\left[\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2}\right].$$

Außenbereich $\rho > b$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 = -\frac{I}{2\pi}\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y x}{x^2 + y^2} + \frac{I}{4\pi}\left[\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x+a)}{(x+a)^2 + y^2} + \frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2}\right].$$

Lösung zur Teilaufgabe 2:

Zur Berechnung der Kraft auf I_1 werden die Feldstärken $\mathbf{H}_2$ und $\mathbf{H}_3$ benötigt. Wegen $\mathbf{H}_3(-a,0) = \mathbf{0}$ liefert nur die Feldstärke $\mathbf{H}_2$ einen Beitrag:

$$\mathbf{H}_2(-a, 0) = \frac{I}{4\pi}\frac{-\mathbf{e}_x y + \mathbf{e}_y(x-a)}{(x-a)^2 + y^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathbf{e}_y(-2a)}{(-2a)^2} = -\mathbf{e}_y\frac{I}{8\pi a}.$$

Die Integration über die Länge l geht wegen der Unabhängigkeit von der Koordinate z in eine Multiplikation mit l über:

$$\mathbf{F} = I_1\left[l\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}(-a,0)\right] = \frac{I}{2}l\,\mathbf{e}_z \times \mu_0\mathbf{H}_2(-a,0) = \frac{I}{2}l\,\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y\mu_0\frac{-I}{8\pi a} = \mu_0 l\frac{I^2}{16\pi a}\underbrace{\left[-\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y\right]}_{\mathbf{e}_x}.$$

Ergebnis: $$\frac{\mathbf{F}}{l} = \mathbf{e}_x\frac{\mu_0 I^2}{16\pi a}.$$

- Vorstellen der Aufgaben der Woche (damit die Studierenden sich sicher fühlen die Aufgaben eigenständig zu bearbeiten).