Übung 1

Netzwerke und Schaltungen 1

Wer bin ich

- René Zurbrügg
- Student 5. Semester ITET
- zrene@studmail.ethz.ch
- www.n.ethz.ch/~zrene

Ablauf einer Übungsstunde

- Nachbesprechung alter Aufgaben
- Ggf. kurz Theorie
- Vorlösen ähnlicher Aufgaben
- Vorbesprechung der Serie

Wichtig!

Werden 75% aller Serien sinnvoll bearbeitet, so erhaltet ihr +0.25 in eurer Endnote!

Sinnvoll bearbeitet bedeutet nicht, dass die Resultate richtig sein müssen

Abgabe über Moodle immer bis **Montag 12:00 Uhr**

Theorie

Vektoren

Notation

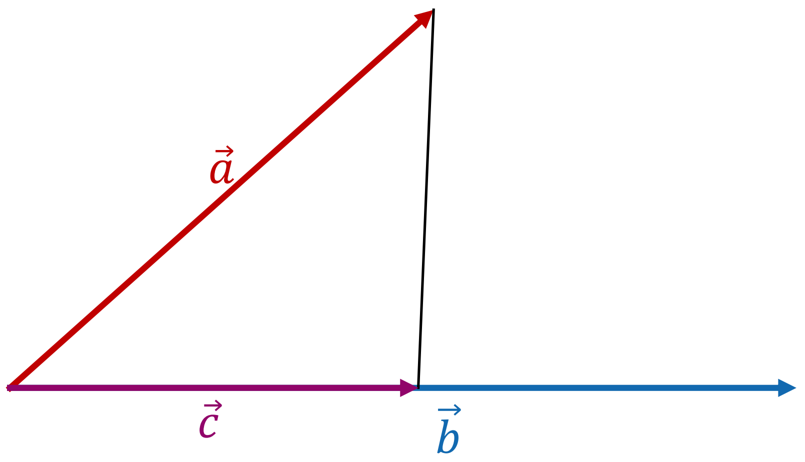
- $\vec{v}\ (= \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \overrightarrow{e_x} + \mathrm{b} \cdot \overrightarrow{e_y} + \mathrm{c} \cdot \overrightarrow{e_z}$, Wobei $\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $v = |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Vektoren

Skalarprodukt

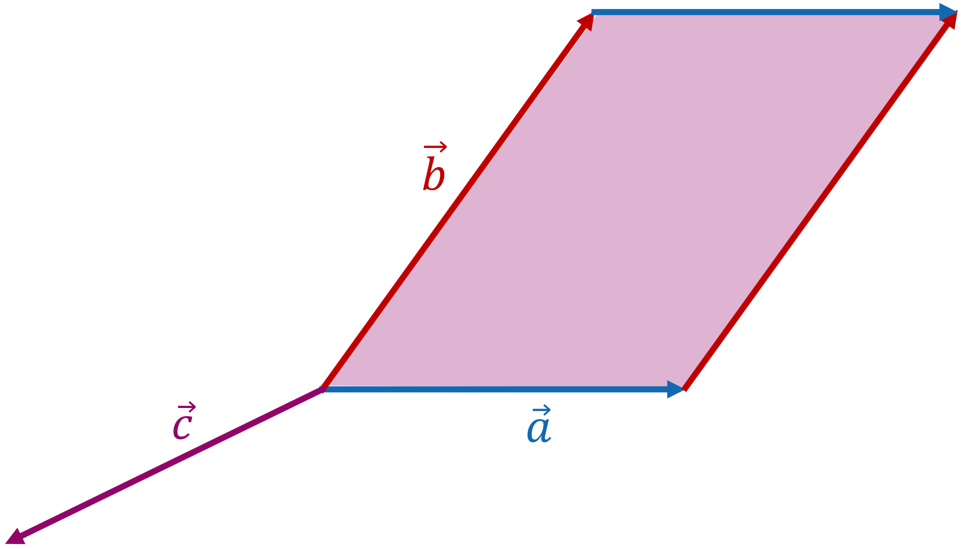
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}| = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$



Vektoren

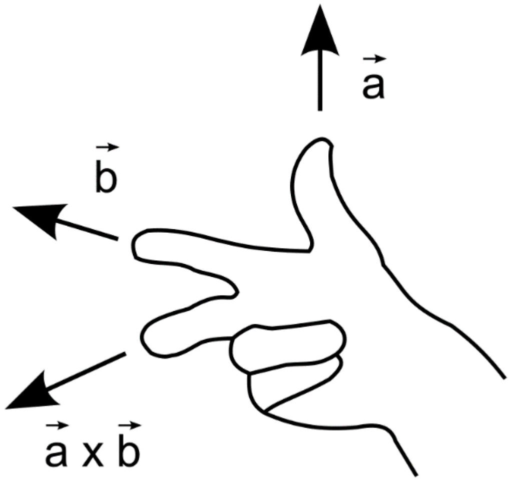
Kreuzprodukt

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z & - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x & - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y & - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$



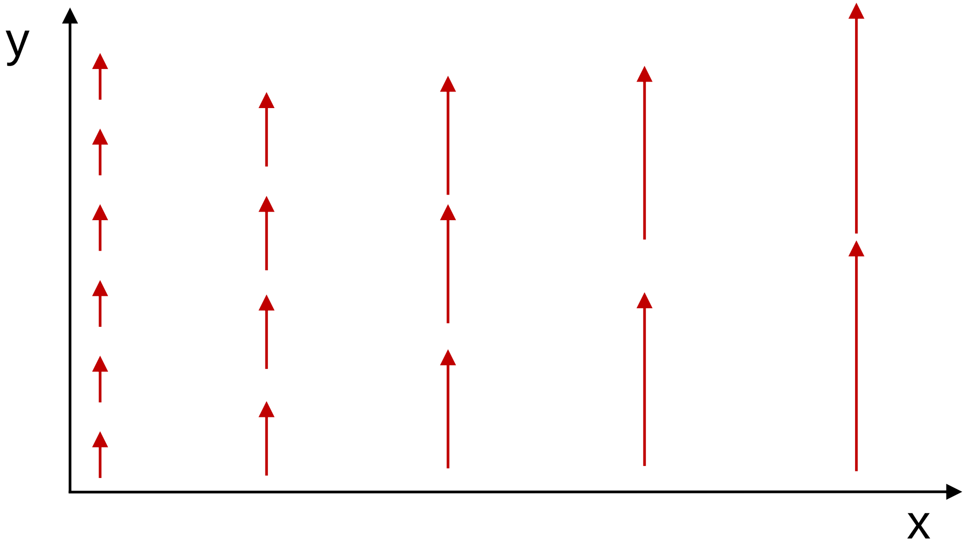
Eigenschaften

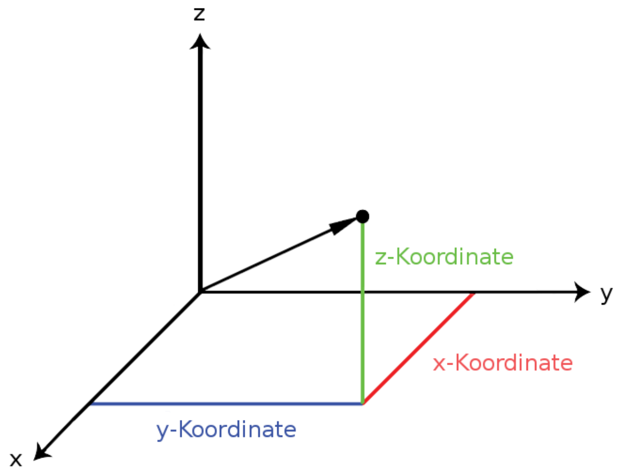
- $\vec{c}$ steht senkrecht zu a und b (Rechte Hand Regel)
- $|\vec{c}|$ entspricht dem aufgespanntem Volumen

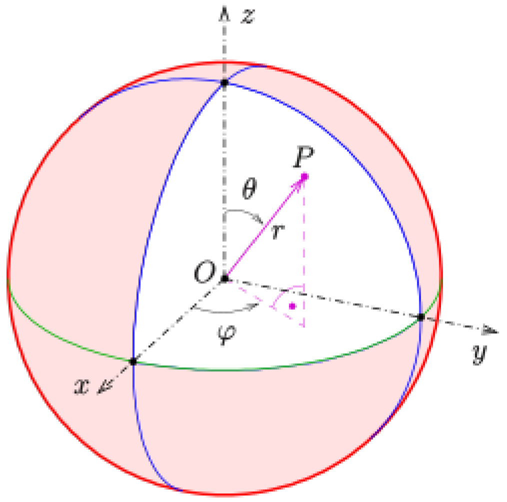


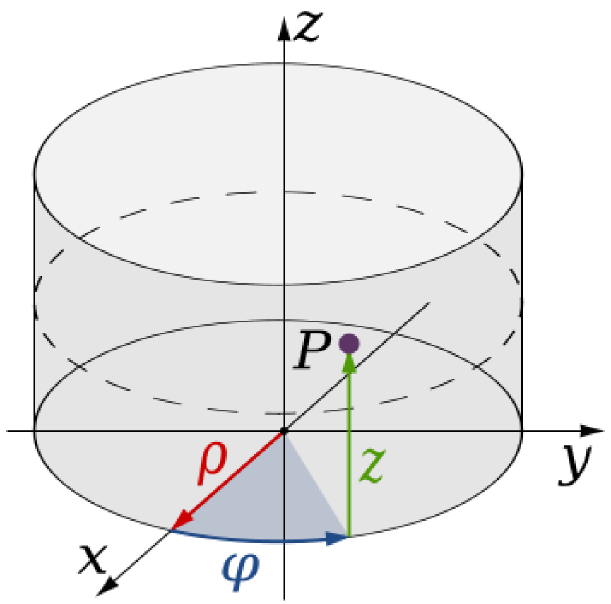
Vektorfelder

- Funktion welche keine Zahl, sondern einen Vektor zurückgibt.
- Beispiel: $f(x, y) = \binom{0}{x}$





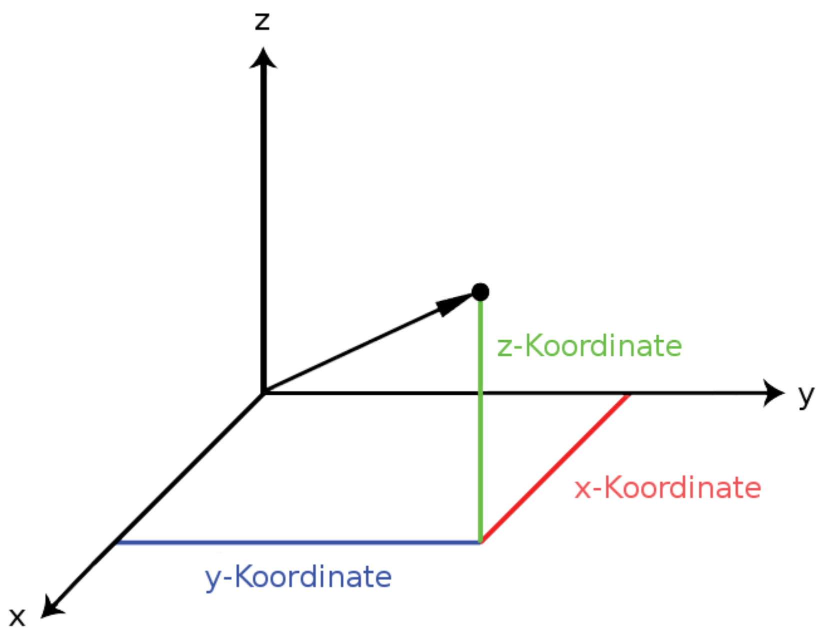




Koordinatensysteme

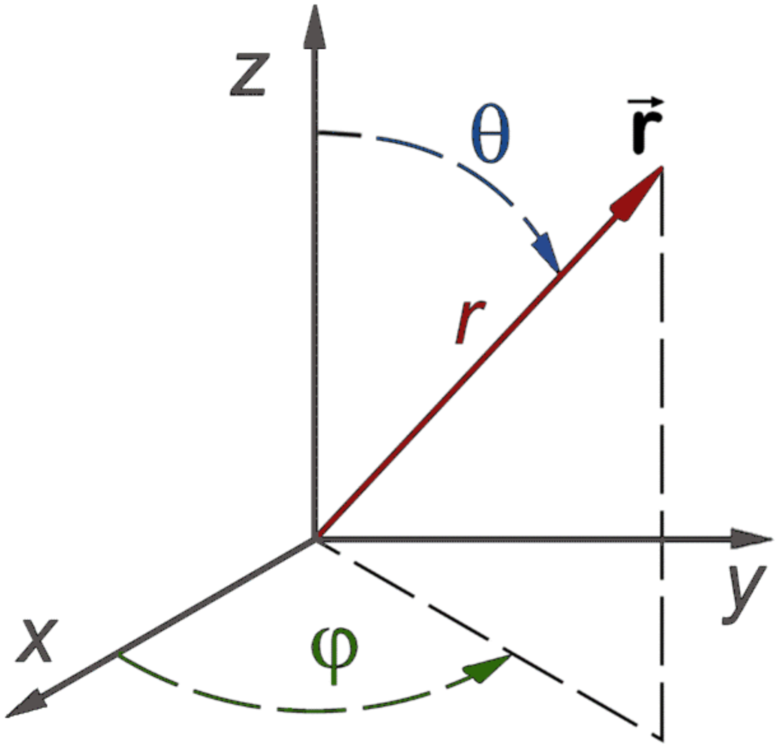
Kartesische Koordinaten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \overrightarrow{e_x} + y \cdot \overrightarrow{e_y} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$$



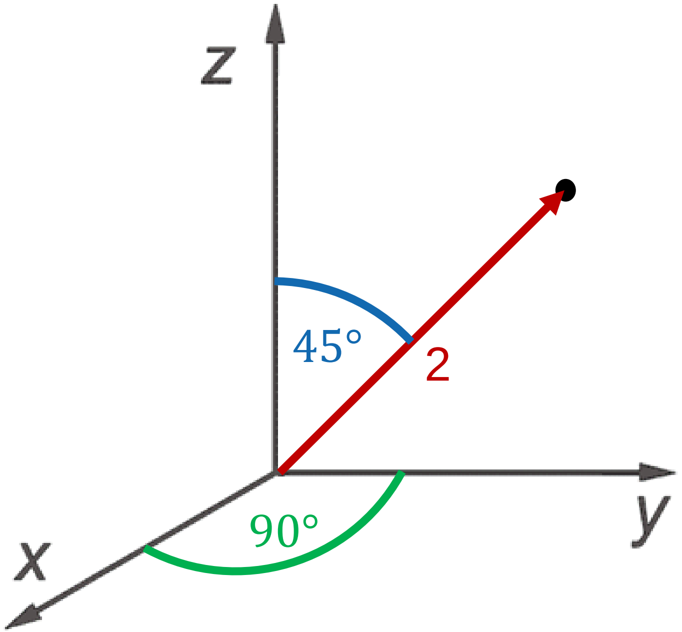
Kugel Koordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = r \cdot \overrightarrow{e_r} + \theta \cdot \overrightarrow{e_\theta} + \varphi \cdot \overrightarrow{e_\varphi}$$



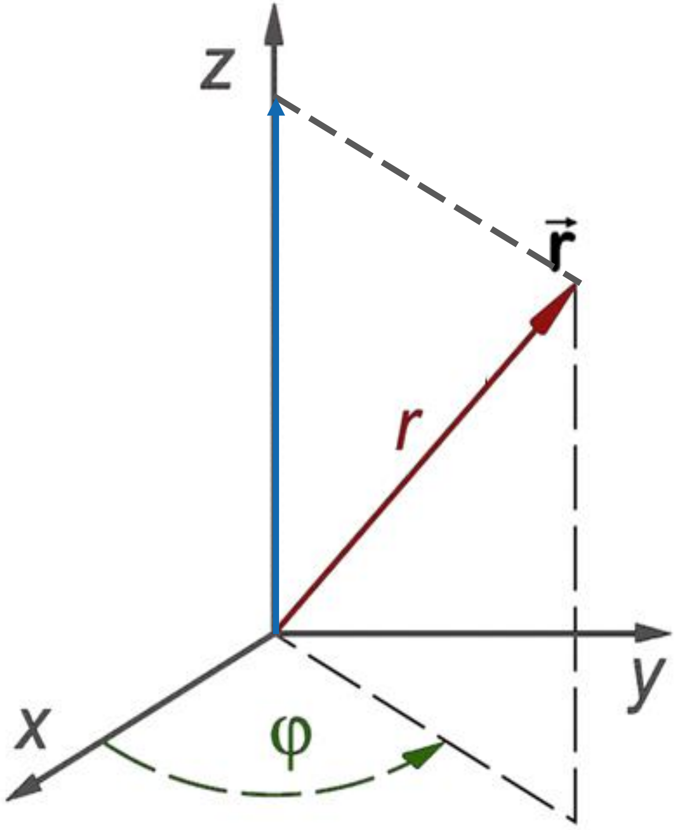
Beispiel:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 45° \\ 90° \end{pmatrix}$$

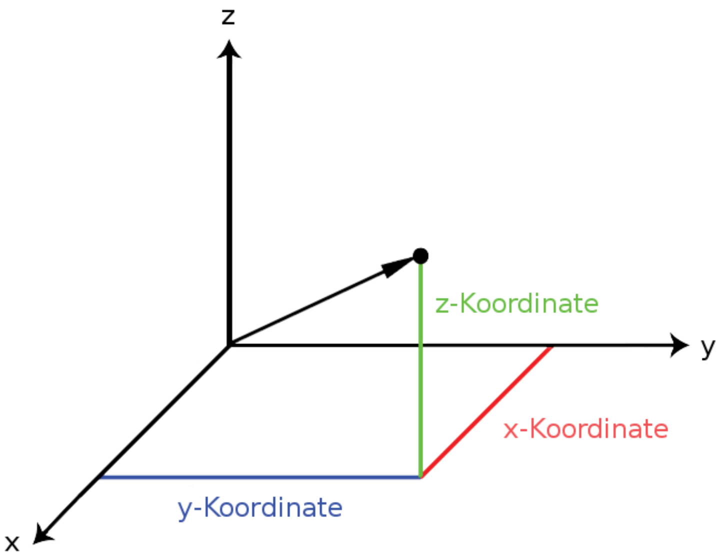


Zylinder Koordinaten

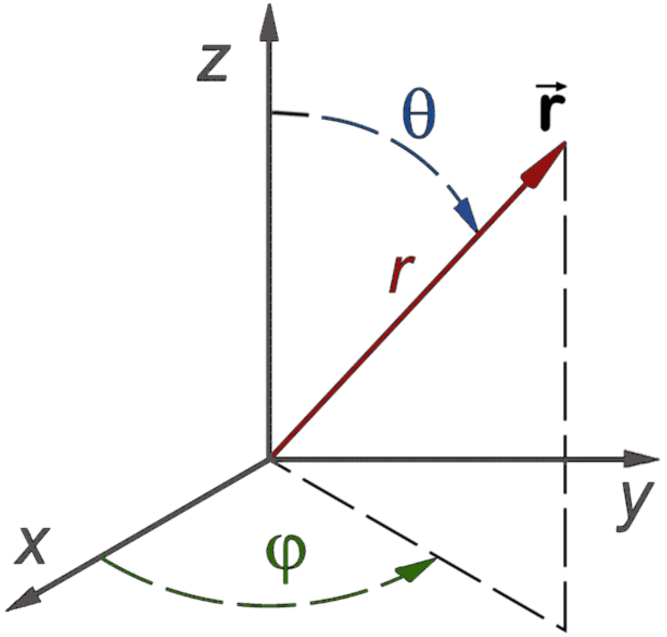
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \rho \cdot \overrightarrow{e_\rho} + \varphi \cdot \overrightarrow{e_\varphi} + z \cdot \overrightarrow{e_z}$$



Umrechnung von Koordinatensystemen



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right) \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

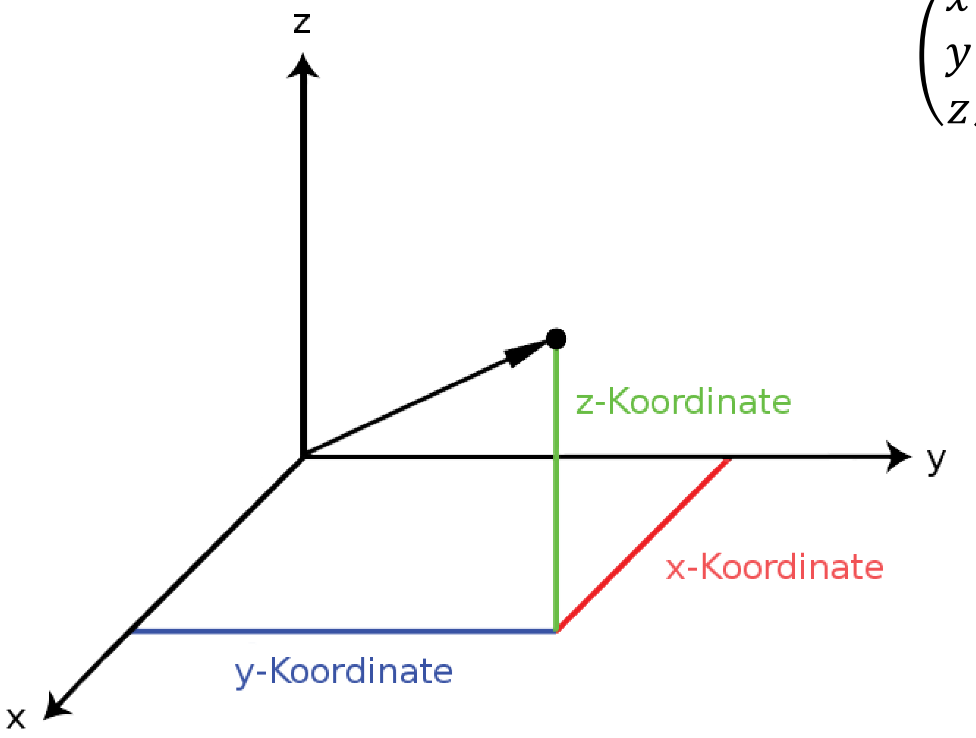


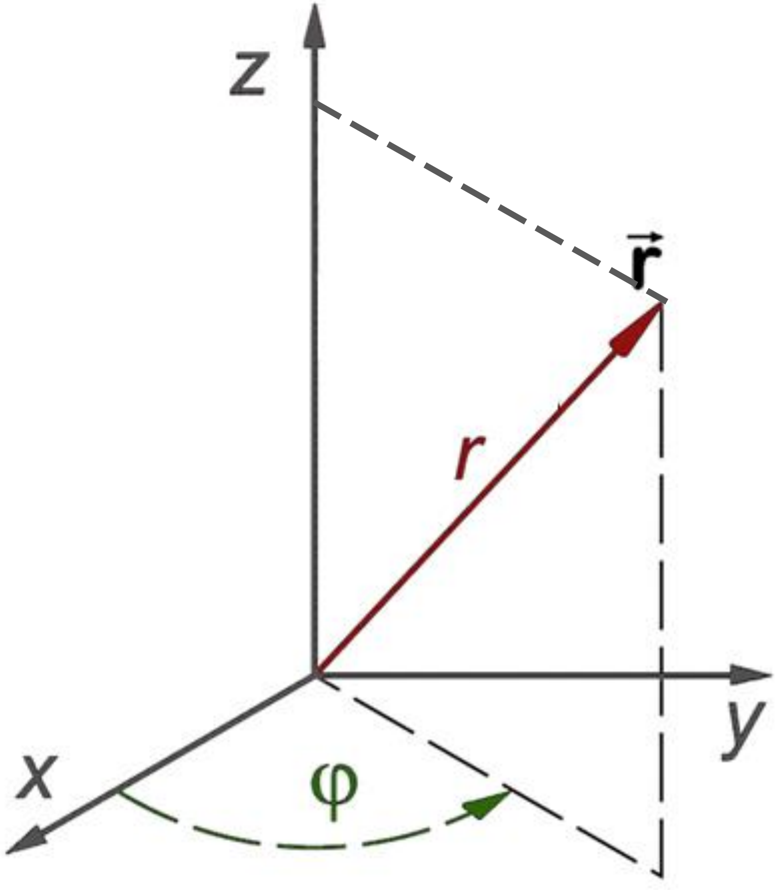
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\theta) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

Umrechnung von Koordinatensystemen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cdot \cos(\varphi) \\ \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

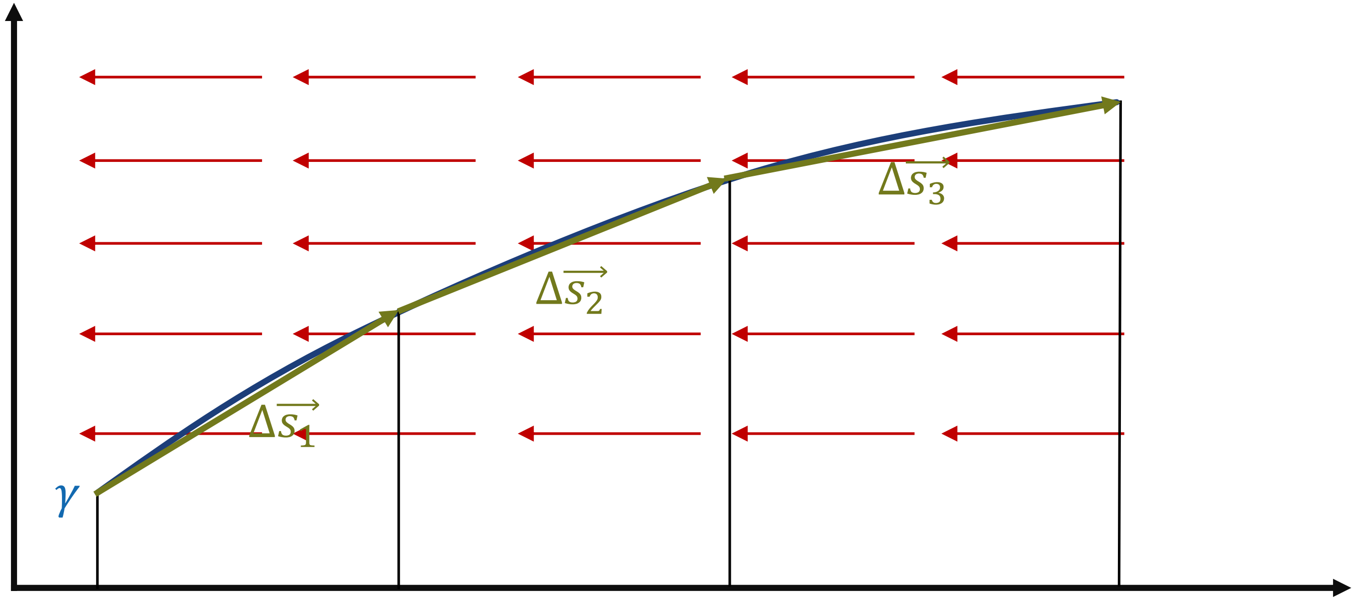




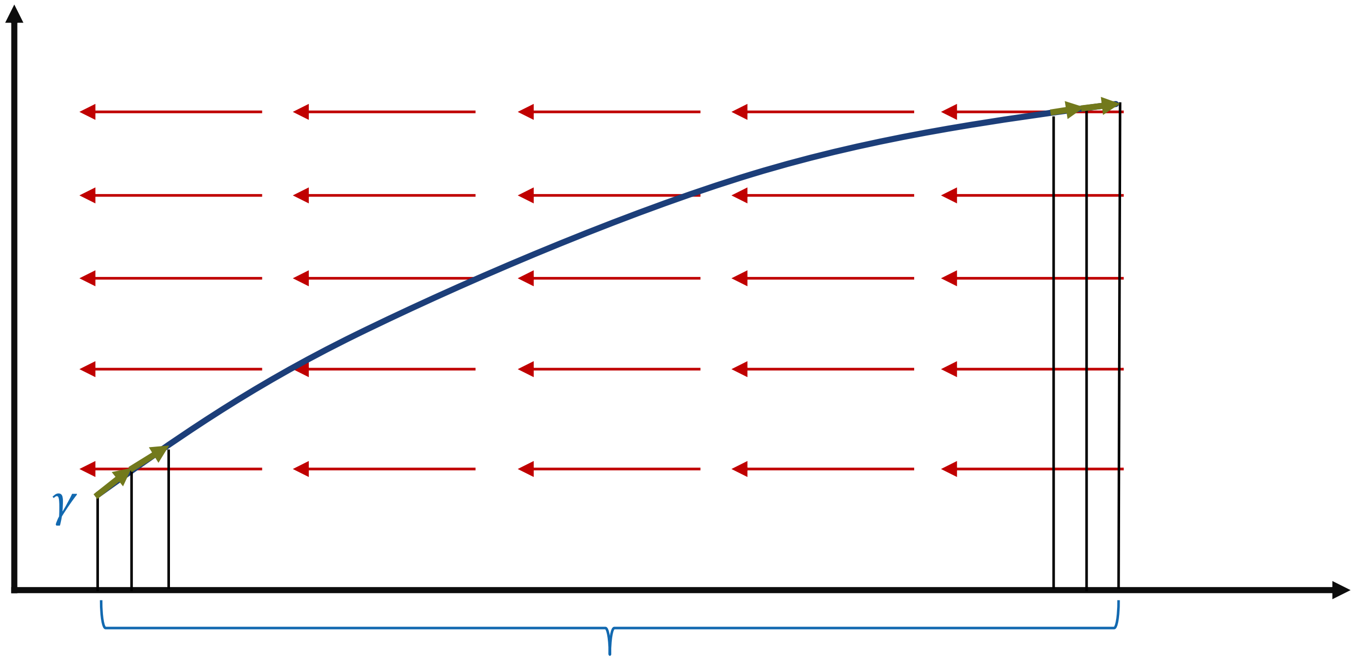
Integralrechnung

Integration in mehreren Dimensionen

Linienintegrale



$$|W| = \left(\vec{F}(x_1, y_1) \cdot \Delta\vec{s_1}\right) + \left(\vec{F}(x_2, y_2) \cdot \Delta\vec{s_2}\right) + \left(\vec{F}(x_3, y_3) \cdot \Delta\vec{s_3}\right)$$



$$|W| = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(x_i, y_i) \cdot \Delta\vec{s_i}$$

$$\left(\frac{n \rightarrow \infty}{\Delta s_i \rightarrow 0}\right) = \int_{\gamma} \vec{F}(x, y) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

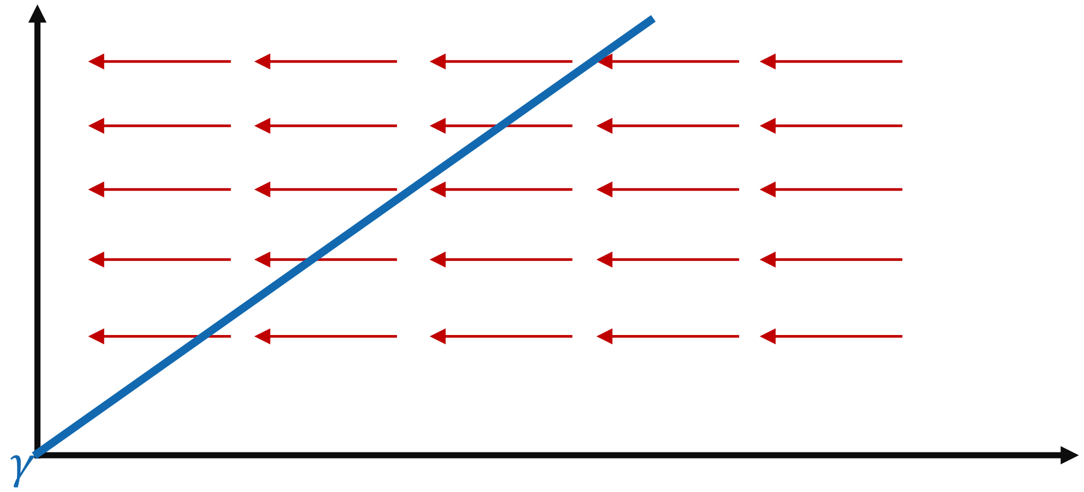
Wobei $d\vec{s}$ gerade der **Steigung** von γ im Punkt (x,y) entspricht

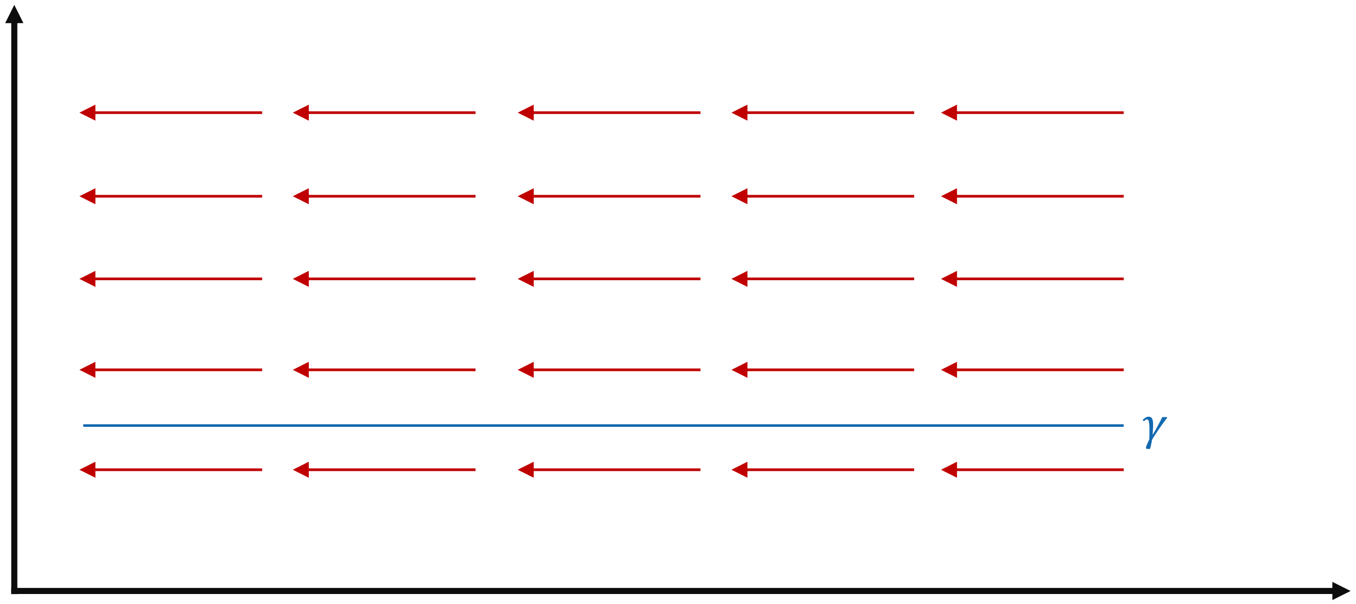
Beispiel anhand einer Geraden

$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix}$

Berechne $\int_{(0,0)}^{(5,5)} \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{s}$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$





$$|W| = |\gamma| \cdot |F| = \int_\gamma \vec{F}(x,y) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Linienintegrale

Merke:

Sind Vektorfeld und Weg parallel zu einander gerichtet und ist das Vektorfeld konstant, so vereinfacht sich das Integral zu einer Multiplikation

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{s} = \underbrace{|\gamma|}_{\text{Länge des Weges}} \cdot |\vec{F}|}$$

Oberflächenintegral

Oberflächenintegrale

Merke:

Sind Vektorfeld und Fläche senkrecht zu einander gerichtet und ist das Vektorfeld konstant, so vereinfacht sich das Integral zu einer Multiplikation

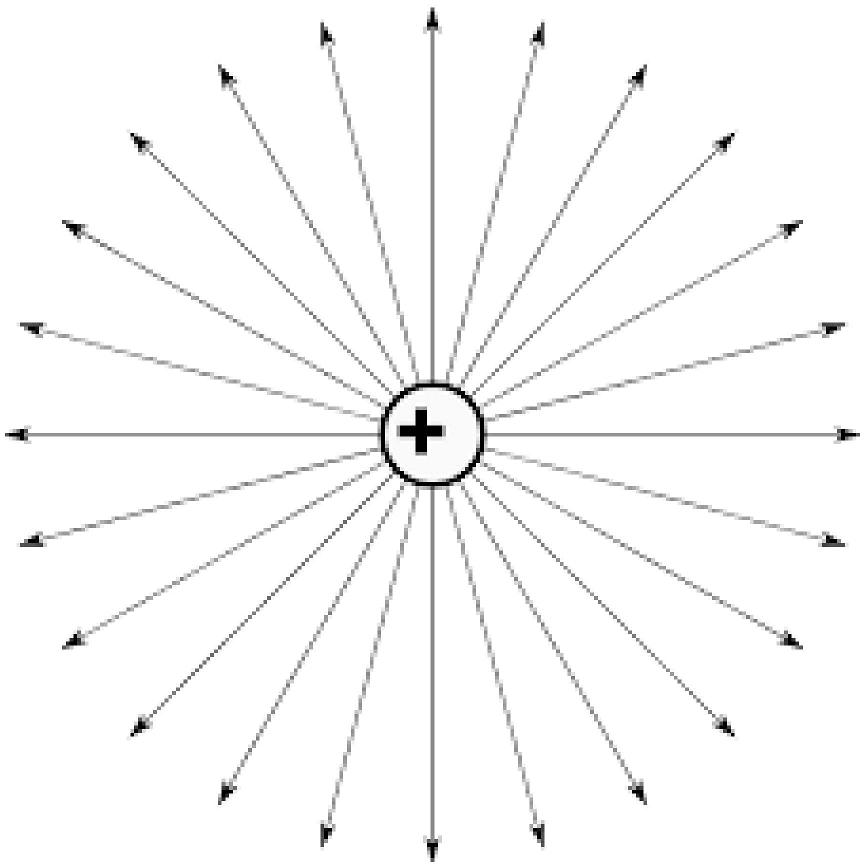
$$\boxed{\iint_A \vec{E}(x,y) \cdot d\vec{A} = |A| \cdot |E|}$$

Betrag der Fläche

ETH zürich

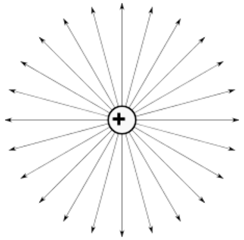
E-Feld und Kraft

Eine Ladung Q erzeugt ein Elektrisches Feld, welches radial nach aussen Zeigt und eine Kraft auf andere Ladungsträger auswirkt.



E Feld einer Punktladung

Das Elektrische Feld einer Punktladung Q am Ort r = (x,y,z) ist durch folgende Formel gegeben



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r}$$

Dieses Feld wirkt folgende Kraft auf eine 2. Ladung Q_2 aus

$$\vec{F}(\vec{r}) = Q_2 \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

Arbeit und Potential

Die Arbeit, welche verrichtet wird um etwas entlang eines Weges von P_1 zu P_2 zu bewegen ist definiert durch

$$W = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Das Potiential gegenüber einem Referenzpotential $\mathrm{P_{ref}}$ ist definiert als

$$\varphi(P_1) = -\int_{P_{ref}}^{P_2} \overrightarrow{E} \cdot d\vec{s}$$

Vektorrechnung #1

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

Berechne $\vec{d} = 3\vec{a}$ - 2 $\vec{b}$ - $\vec{c}$

Vektorrechnung #2

Berechne die Fläche des Dreiecks ABC:
A (-1,2) B (3,4) C (5,-6)

Vektorrechnung #3

Berechne die Fläche des Vierecks A(-2, -2) B(2,6) C(8,4) D(10,-4)

Vektorrechnung #4

Von einem Punkt P der Verbindungsstrecke der Fusspunkte A und B zweier gleich hoher Türme sieht man die Spitze des näheren Turms unter dem Höhenwinkel 60°.
Von einem Punkt, der auf einer zu AB normalen Geraden 30m seitwärts von P liegt, sieht man die Turmspitzten unter den Höhenwinkeln 45° und 30°. Wie hoch sind die Türme und wie gross ist ihr Abstand?

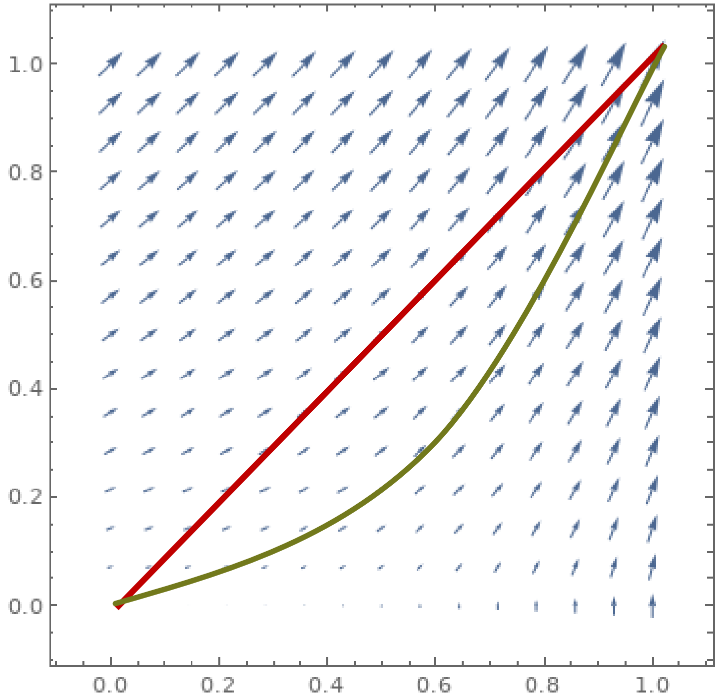
Integralrechnung #1

Betrachte die Funktion $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{pmatrix} \sqrt{y} \\ x^3 + y \end{pmatrix} = \sqrt{y} \cdot \overrightarrow{e_x} + (x^3 + y) \cdot \overrightarrow{e_y}$

Berechne das Linienintegral von (0,0) nach (1,1) entlang des Pfades:

a) Linie mit der Gleichung: $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$

b) Linie mit der Gleichung: $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$



Ladungen

Zwei Punktladungen $Q_1 = 1\,nAs, Q_2 = -1\,nAs$ haben einen Abstand a = 25cm.
Wie Gross ist die Feldstärke E im Punkt P, der zu den beiden Ladungen eine Entfernung r = 30cm hat.