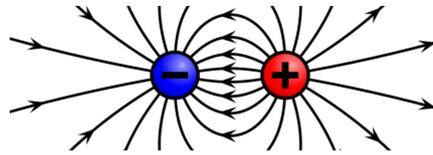


# 1 Analyse von Gleichstromnetzwerke

## 1.1 Strom, Spannung und Widerstand

Zwischen zwei unterschiedlich geladenen Punkten entsteht ein **elektrisches Feld**. Geladene Teilchen spüren eine Kraft in Richtung dieser Feldlinien.



### Definition Spannung

Wir definieren die Spannung zwischen zwei Punkten als das Wegintegral über das Elektrische Feld:

$$U_{AB} := \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \text{ [U] = Volt [V]}$$

### Bemerkung

Da die Beziehung  $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$  gilt und die Arbeit als  $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$  definiert ist, können wir die Spannung zwischen Zwei Punkten als **Maß der benötigten Arbeit** um ein Ladungsträger von A nach B zu bringen betrachten.

### Definition Strom

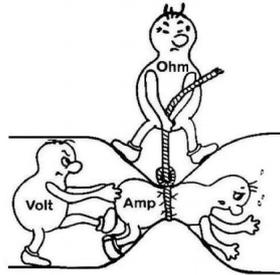
Als Strom bezeichnen wir die Menge von Ladungen welche in einer gewissen Zeit durch eine Fläche fließen.

$$I := \frac{\#Ladung}{Zeit} = \frac{dQ}{dt} \text{ [I] = A, Ampère}$$

## Definition Widerstand und Leitwert

Der **Widerstand** bestimmt, wieviel Strom fließen kann, wenn eine bestimmte Spannung angelegt wird.

Ist der Wert des Widerstandes unabhängig vom Strom, so bezeichnen wir ihn als ohmschen Widerstand.



$$R := \frac{U}{I} = \rho \frac{l}{A}, [R] = \Omega, \text{Ohm}$$

Als **Leitwert** bezeichnen wir die Inverse des Widerstandes. Er gibt an, wie groß die Spannung ist, wenn ein gewisser Strom fließt.

$$Y = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l}$$

Da das Elektrische Feld wirbelfrei ist, erhalten wir unabhängig vom Weg den gleichen Wert für die Spannung  $U_{AB}$

Dies bedeutet jedoch auch, dass wir für einen geschlossenen Weg die Spannung  $0V$  erhalten müssen, da für jede geschlossene Kurve  $\gamma$  gilt:

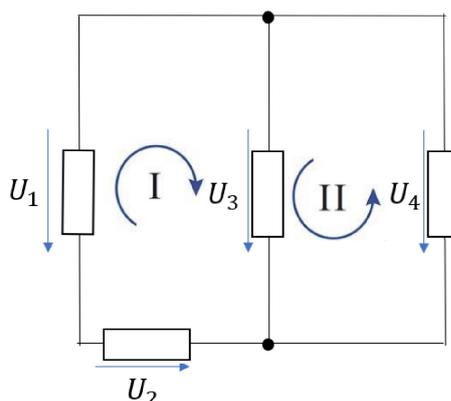
$$\int_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_0} \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{01} + U_{10} = 0$$

Mit dieser Erkenntnis können wir die Maschenregel definieren:

## Definition Maschenregel

Die Summe aller Spannungen in einer Masche ergibt 0

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$



### Maschenregel

$$\text{I: } (-U_1) + U_3 + (-U_2) = 0$$

$$\text{II: } U_3 + (-U_4) = 0$$

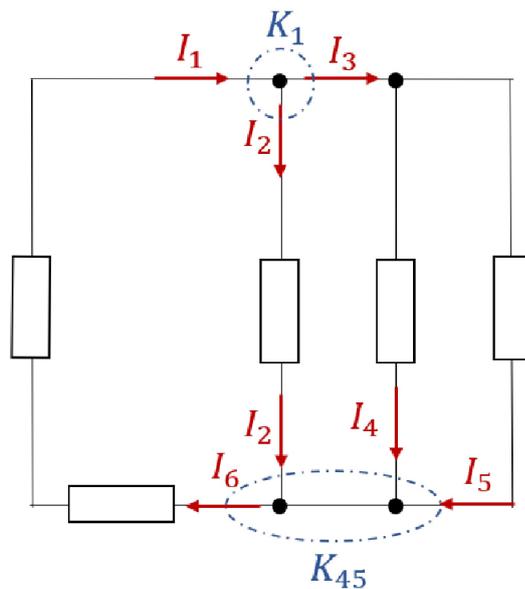
Analog können wir mithilfe von Ladungserhaltung argumentieren, dass sämtliche Ladungen, welche in ein Gebiet hineinfließen, auch wieder aus diesem hinausfließen müssen.

### Definition Knotenregel

Die Summe aller Ströme die in einen Knoten hinein/hinausfließen muss 0 ergeben.

$$\sum_{i=0}^n I_n = 0$$

**Wichtig** Die Knotenregel kann auch auf ein Gebiet von Knoten angewandt werden.



#### Knotengleichungen

$$K_1: I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$K_{45}: I_2 + I_4 + I_5 - I_6 = 0$$

## 1.2 Grundlegende Netzwerkumformungen

Wir interessieren uns nun dafür, wie sich Widerstände verhalten, wenn wir sie seriell/parallel verknüpfen.

### Definition Serienschaltung

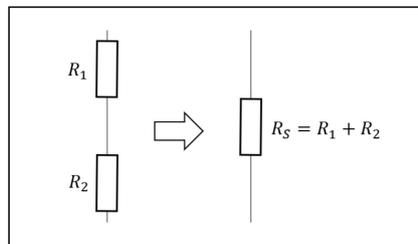
Werden mehrere Widerstände seriell miteinander verbunden, so addieren sich die Widerstandswerte

$$R_{\text{serie}} = \sum_{i=0}^n R_i$$

### Begründung

Mehrere Widerstände in Serie können als ein langer Widerstand mit konstanter Fläche angesehen werden. Da die Längenabhängigkeit des Widerstandes im Zähler steht, addieren sich die Werte.

$$R_s = \rho \cdot \frac{l_1 + l_2}{A} = \rho \cdot \frac{l_1}{A} + \rho \cdot \frac{l_2}{A} = R_1 + R_2$$



### Definition Parallelschaltung

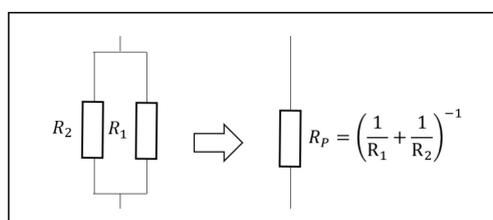
Werden mehrere Widerstände Parallel miteinander verbunden, so addieren sich die Leitwerte

$$Y_{\text{parallel}} = \sum_{i=0}^n Y_i \quad \left| \quad R_{\text{parallel}} = \left( \sum_{i=0}^n \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

### Begründung

Mehrere Widerstände parallel können als ein Widerstand mit größerer Fläche und konstanter Länge angesehen werden. Da die Flächenabhängigkeit des Widerstandes im Nenner steht, addieren sich die Leitwerte.

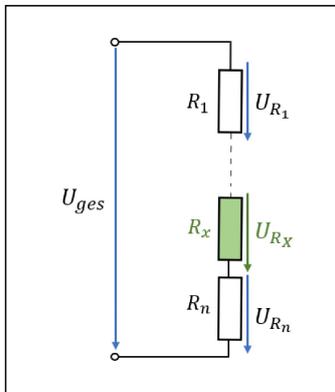
$$Y_p = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1 + A_2}{l} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_1}{l} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A_2}{l} = Y_1 + Y_2$$



## Definition Spannungsteiler

Die Spannungsteilerregel gibt an, wie sich eine Spannung über verschiedene Widerstände aufteilt, wenn diese in **Serie** geschaltet sind.

$$U_{R_x} = U_{ges} \cdot \frac{R_x}{\sum R_i}$$



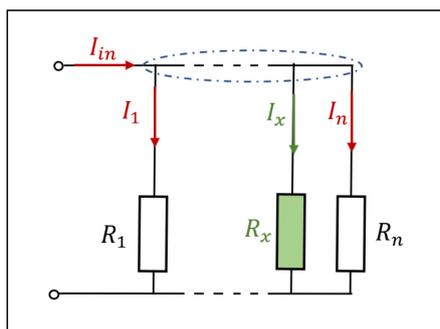
### Begründung

Gemäss  $U = R \cdot I$  und der Serienschaltung ist der Strom durch alle Widerstände gegeben als  $I = \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$   
Nun müssen wir nur noch den Strom mit dem gesuchten Widerstand multiplizieren um die Spannung zu erhalten:  $U_{R_x} = R_x \cdot I = R_x \frac{U_{ges}}{\sum R_i}$

## Definition Stromteiler

Die Stromteilerregel gibt uns an, wie sich die Ströme in einem Knoten aufteilen, wenn die Widerstände **parallel** geschaltet sind.

$$I_x = I_{in} \cdot \frac{(R_1 || \dots || R_n)}{R_x}$$



### Spezialfall 2 Widerstände

Falls der Stromteiler nur mit zwei Widerständen angewendet wird, vereinfacht sich die Formel:

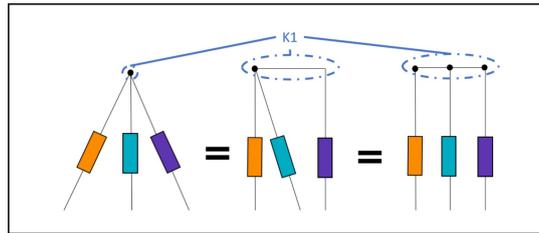
$$I_x = I_{in} \cdot \frac{R_y}{R_x + R_y}$$

Der Widerstand dessen Strom uns **nicht** interessiert steht hierbei im Zähler!

## 1.2.1 Grundregeln bei Netzwerkumformungen

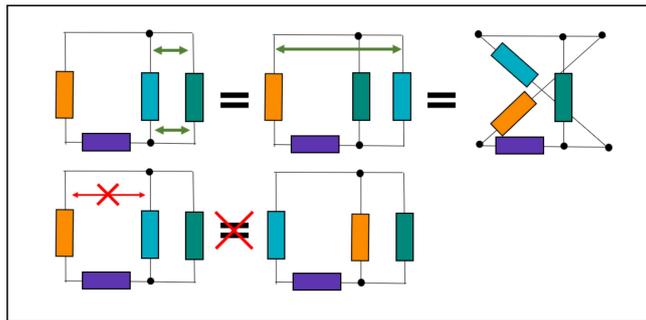
### Regel 1 Expandieren von Knoten

Knoten können aufgeteilt und mit Verbindungslinien verbunden werden



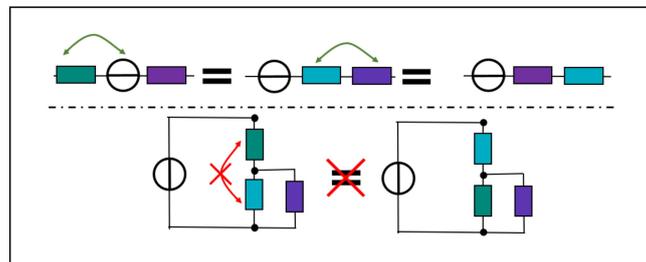
### Regel 2 Verschieben von Elementen

Elemente können entlang von **Verbindungslinien ohne Widerständen** verschoben werden



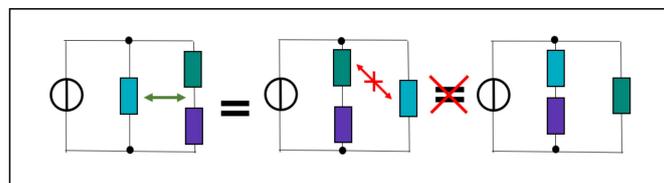
### Regel 3 Vertauschen von Elementen in Serie

Elemente die **in Serie** geschaltet sind können vertauscht werden



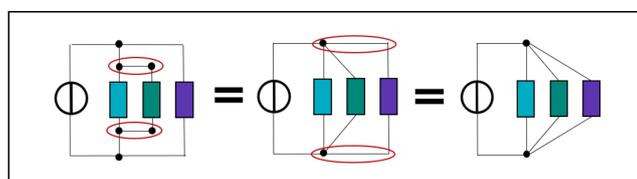
### Regel 4 Vertauschen von parallel geschalteten Elementen

Elemente die **parallel** geschaltet sind können vertauscht werden



### Regel 5 Knoten kontrahieren

(Analog zu 1) Knoten können zusammengezogen werden, sofern sie nicht durch einen Widerstand verbunden sind.

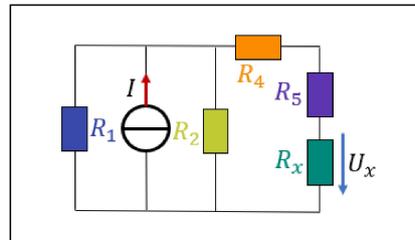


### 1.3 Vorgehen um Schaltbilder mit einer Quelle zu vereinfachen

1. Bringe Quelle auf die linke Seite
2. Forme mit Regel 1 - 5 das Netzwerk soweit um, bis nur noch Spannungs/Stromteiler oder einfache Maschen vorhanden sind.
3. Expandiere nun das Netzwerk Schritt für Schritt, bis die Spannung über dem gesuchten Widerstand berechnet werden kann.

#### Beispiel #1

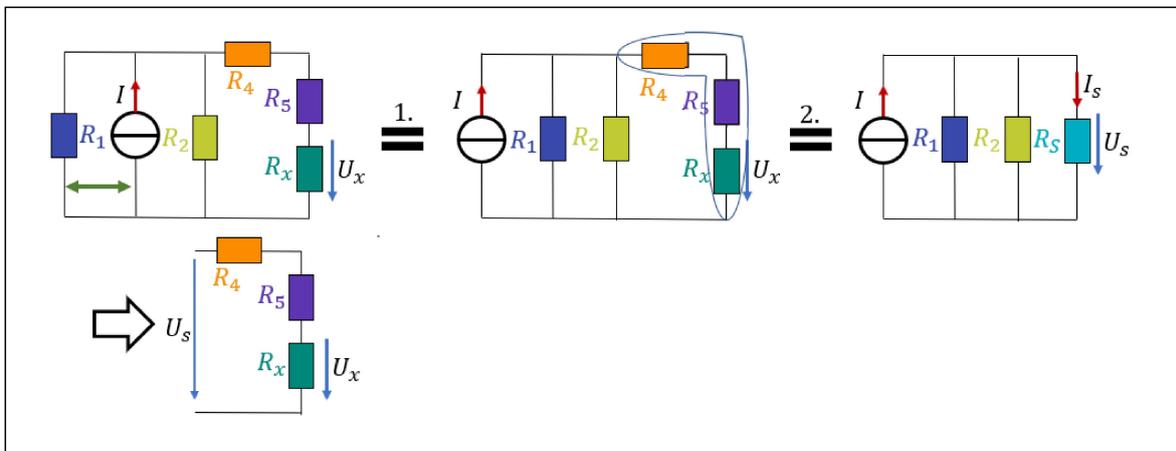
1) Berechnen sie  $U_x$  in Abhängigkeit des Quellstromes  $I$



#### Lösung

1. Gemäss Regel 2 können wir  $R_1$  und die Stromquelle vertauschen.
2. Die Widerstände  $R_4, R_5$  und  $R_x$  können zu  $R_S = R_3 + R_4 + R_5$  zusammengefasst werden.
3. Mithilfe der Stromteilerregel erhalten wir  $I_S = I \cdot \frac{(R_1 || R_2 || R_S)}{R_S}$  und somit  $U_S = I \cdot (R_1 || R_2 || R_S)$
4. Die Spannung  $U_S$  liegt also über dem Widerstand  $R_S$  an. Wenn wir diesen wieder in die ursprünglichen 3 Widerstände aufteilen erhalten wir mithilfe der Spannungsteilerregel

$$U_x = U_S \cdot \frac{R_x}{R_4 + R_5 + R_x}$$



In manchen Fällen kann es schwierig sein, die Quelle auf die linke Seite zu bringen oder das Schaltbild nützlich umzuformen.

Um ein erstes Ersatzschaltbild zu erhalten, kann das "Flussverfahren" angewandt werden.