

2.2 Magnetostatik

Analog zum elektrischen Feld definieren wir ein magnetisches Feld, dessen Feldlinien Kräfte auf eine bewegte Ladung auswirken.

Auslöser für das magnetische Feld sind **bewegte Ladungen** welche gemäss der rechten Hand Regel ein Magnetfeld hervorrufen, das diese einschliesst.

Im Falle von Stabmagneten oder Ähnlichem ist es der Spin der Elektronen, welcher das stationäre Magnetfeld auslöst*

Definition Rechte Hand Regel

Das Magnetfeld B um einen stromdurchflossenen Leiter baut sich stets gegen den Uhrzeigersinn auf und ist **immer** geschlossen.

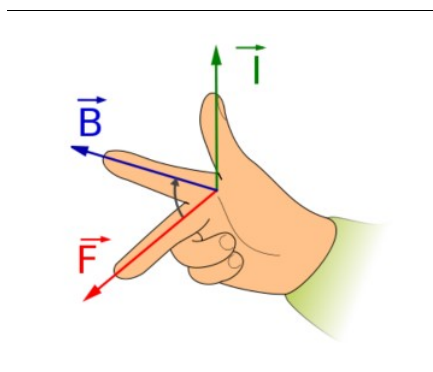


Definition Lorentzkraft

Bewegte Ladungen in einem Magnetfeld verspüren eine Kraft, welche proportional zur Stärke des B-Feldes und der Geschwindigkeit ist.

Die Kraft steht senkrecht zu den Feld- und Geschwindigkeits-Vektoren.

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$



Definition H-Feld

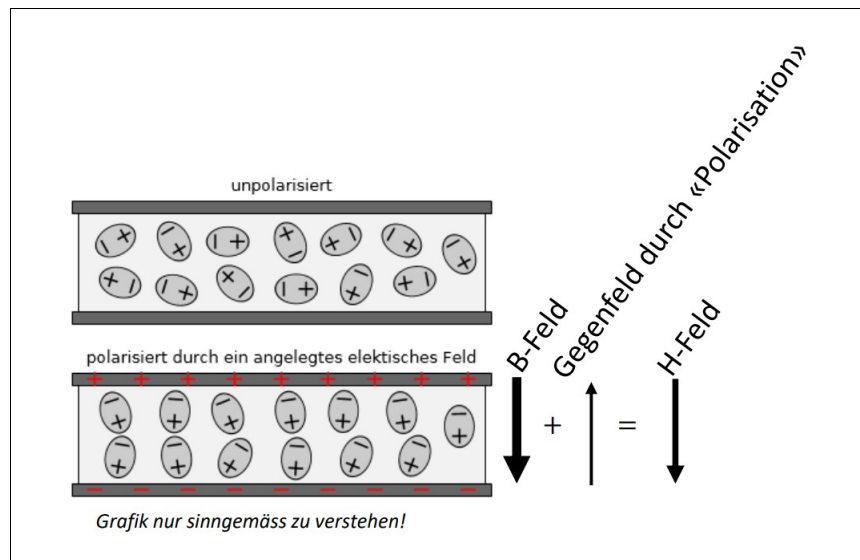
Legen wir ein magnetisches Feld an eine Materie an, so richten sich die eingeschlossenen Teile entgegen dem angelegten Feld aus und "schwächen" dieses.

Das "abgeschwächte" Feld bezeichnen wir als H-Feld und entspricht dem Feld, welches real auf Ladungen wirkt.

Der "Abschwächungsfaktor" $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ wird als Permeabilität bezeichnet.

Das H-Feld verändert sich bei Materialübergängen, das **B-Feld** bleibt **konstant**.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$



Definition Durchflutungssatz

Der Durchflutungssatz besagt, dass das Kurvenintegral des H-Feldes über eine beliebige **geschlossene** Kurve gerade dem Wert des durch diese Fläche fließendes Stromes entspricht.

Diesen Wert definieren wir als magnetische Spannung Θ

$$\Theta = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

Beispiel #4

Aufgabe

Berechnen Sie die magnetische Spannung Θ und das H-Feld $\vec{H}$ um einen unendlich langen, mit Strom I durchflossenen Leiter. Der Radius des Leiters sei ρ .

Lösung

Wir wählen als Kurve einen Kreis mit Radius R um unseren Leiter.

Da wir von einem perfekten Leiter ausgehen, treffen wir die Annahme, dass das Magnetfeld achsensymmetrisch und somit konstant entlang des Kreises ist.

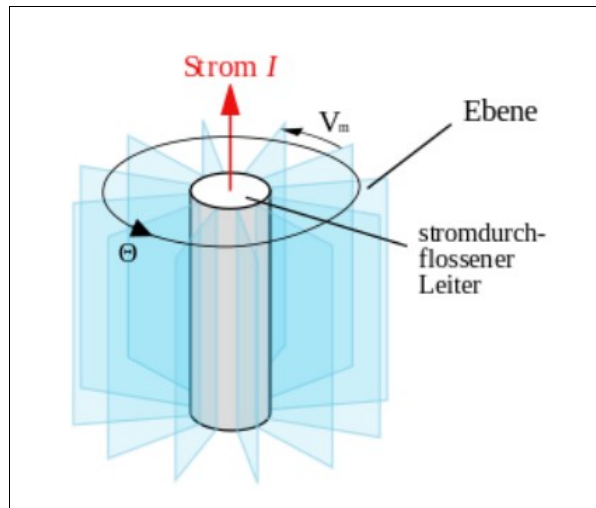
Wir erhalten: für $R > \rho$:

$$\Theta = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = I$$
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = I \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi R} \cdot \vec{e}_\phi}}$$

Für $R < \rho$:

$$\underline{\underline{\Theta(R) = \oint_{2\pi R} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi \rho^2} \cdot r \cdot d\phi \cdot dr = \frac{2 \cdot I}{\rho^2} \cdot \frac{1}{2} R^2 = \frac{R^2 \cdot I}{\rho^2}}}$$
$$\rightarrow |H| \cdot 2\pi R = \frac{I \cdot R^2}{\rho^2} \rightarrow \underline{\underline{\vec{H}(R) = \frac{I}{2\pi \rho^2} \cdot R \cdot \vec{e}_\phi}}$$

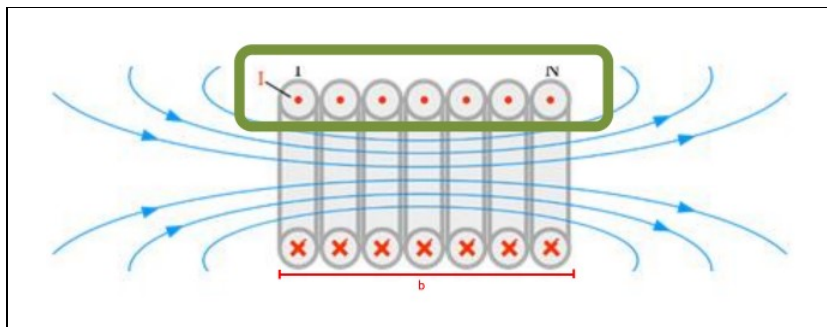
Skizze



Magnetische Spannung innerhalb einer Spule

Analog zu den Berechnungen beim Leiter kann man die magnetische Spannung innerhalb einer Spule berechnen. Unter der Annahme, dass das magnetische Feld ausserhalb der Spule vernachlässigbar ist und die Spule N Windungen hat, erhalten wir für den Fluss durch das Innere einer Spule:

$$\Theta_{Spule} = \oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = N \cdot I \simeq \int_0^b \vec{H} \cdot d\vec{s}$$



Im folgenden gehen wir davon aus, dass die magnetische Spannung ungefähr $\Theta = \int_0^l \vec{H} d\vec{s}$ entspricht.

Definition magnetischer Fluss

Als magnetischen Fluss Φ bezeichnen wir die "Menge B-Feld", welche durch eine gegebene Fläche fließt.

$$\Phi := \iint_A \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot da$$

Definition magnetischer Widerstand

Als magnetischer Widerstand R_m bezeichnen wir das Verhältnis zwischen magnetischer Spannung und magnetischem Fluss

Er sagt etwas darüber aus, wie gross der magnetische Fluss bei einer gegebenen magnetischen Spannung ist.

$$R_m = \frac{\Theta}{\Phi} \underbrace{\quad}_{\text{magn. Leiter}} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Begründung

Wir gehen davon aus, dass die magnetische Spannung über einem Leiter mit Länge l anliegt, dessen Querschnittsfläche A ist.

$$\frac{\Theta}{\Phi} = \frac{\int_0^l \vec{H} \cdot d\vec{s}}{\iint_a \vec{B} d\vec{A}} = \frac{l \cdot H}{\mu \cdot A \cdot H} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

2.2.1 Das Reluktanzmodell

magnetische Grössen im Vergleich zu elektrischen

	Elektrisch	Einheit	Magnetisch	Einheit
Leitfähigkeit	κ	$[\frac{1}{\Omega \cdot m}]$	$\mu (= \mu_0 \cdot \mu_r)$	$[\frac{H}{m}]$
Widerstand	$R = \frac{l}{\kappa A}$	$[\Omega]$	$R_m = \frac{l}{\mu A}$	$[\frac{1}{H}]$
Leitwert	$G = \frac{1}{R}$	$[S]$	$\Lambda_m = \frac{1}{R_m}$	$[H]$
Spannung	$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$[V]$	$\Theta_{AB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{s}$	$[A]$
Strom / Fluss	$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \kappa \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A}$	$[A]$	$\iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \mu \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A}$	$[Wb]$
Ohmsches Gesetz	$U = R \cdot I$		$\Theta = R_m \cdot \Phi$	
Maschenregel	$U_0 = \sum_{Masche} U_m$		$\Theta (= NI) = \sum_{Masche} \Theta_m$	
Knotenregel	$\sum_{Knoten} I_k = 0$		$\sum_{Knoten} \Phi_k = 0$	

Definition Reluktanzmodell

Das Reluktanzmodell besagt, dass man ein magnetisches Ersatzschaltbild mit denselben Rechenregeln wie bei einem elektrischen Netzwerk berechnen kann.

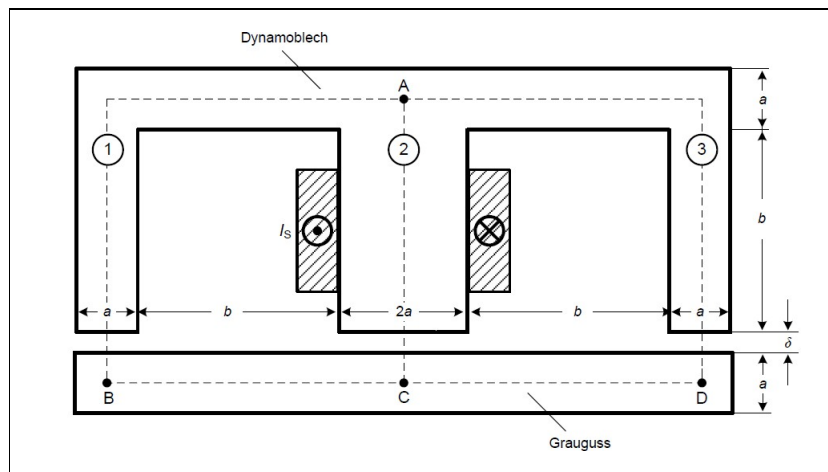
Vorgehen

- Spulen werden mit Spannungsquellen ersetzt $V_m = N \cdot I$
- Magnetkerne/Luftspalte etc. werden mithilfe der Länge und Querschnittsfläche als Widerstände modelliert. $R_m = \mu \frac{l}{A}$
- Für magnetische Widerstände gelten die gleichen Regeln wie bei elektrischen (Serienschaltung / Parallelschaltung).

Beispiel #5

Aufgabe Hubmagnet

Der mittlere Schenkel 2 eines E-Kernes aus Dynamoblech trägt eine Wicklung mit N Windungen. Über die drei Luftspalten mit gleicher Länge δ wird ein Anker aus Grauguss mit der Kraft F_A angezogen. E-Kern und Anker besitzen die gleiche Dicke d .



Gegeben sind folgende Parameter:

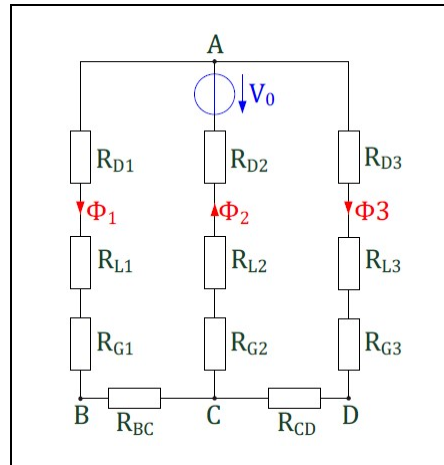
Windungszahl der Wicklung:	$N = 1000$
Magnetische Feldkonstante:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$
Relative Permeabilität Dynamoblech:	$\mu_{rD} = 2000$
Relative Permeabilität Gusseisen:	$\mu_r = 250$
Luftspaltlänge:	$\delta = 0.1 \text{ mm}$
Anzugskraft Anker:	$F_A = 150 \text{ N}$
Breite E-Kern und Anker:	$a = 20 \text{ mm}$
Abstand der Schenkel:	$b = 80 \text{ mm}$
Dicke E-Kern und Anker:	$d = 50 \text{ mm}$

Berechnen sie die magnetische Spannung auf dem Weg ACD.

Lösung

Zuerst zeichnen wir ein Reluktanzmodell des Magneten.

Wobei R_L die Luftspalte, R_{Di} die Beine des Magneten und R_{Gi} sowie R_{BC} und R_{CD} das Gusseisenstück modellieren.



Für die Spannungsquelle erhalten wir:

$$V_0 = N \cdot I_s = 1000 \cdot 211.3 \text{ mA} = 211.3 \text{ A}$$

Für die Widerstände:

$$\begin{aligned} R_{D1} &= R_{D3} = \frac{2b+2a}{\mu_0 \mu_r d a d} = 79.6 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{D2} &= \frac{b+\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r d a d} = 17.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{L1} &= R_{L3} = \frac{\delta}{\mu_0 a d} = 79.6 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{L2} &= \frac{\delta}{2\mu_0 a d} = 39.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{G1} &= R_{G3} = \frac{\frac{a}{2}}{\mu_0 \mu_r G a d} = 31.8 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{G2} &= \frac{\frac{a}{2}}{2\mu_0 \mu_r G a d} = 15.9 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_{BC} &= R_{CD} = \frac{b+\frac{3}{2}a}{2\mu_0 \mu_r G a d} = 350.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Weiter können wir die einzelnen Widerstände seriell zusammenfassen:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{D1} + R_{L1} + R_{G1} = 191 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_2 &= R_{D2} + R_{L2} + R_{G2} = 73.7 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_3 &= R_{D3} + R_{L3} + R_{G3} = 191 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \\ R_E &= R_{BC} = R_{CD} = 350.1 \cdot 10^3 \text{ H}^{-1} \end{aligned}$$

Die Spannung U_{AC} lässt sich als Spannungsteiler berechnen:

$$U_{AC} = U_0 \cdot \frac{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E))}{((R_1 + R_E) || (R_3 + R_E)) + R_2} = 166 \text{ A}$$

Und somit die Spannung U_{AD} :

$$\underline{\underline{U_{AD}}} = 166 \text{ A} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_E} = \underline{\underline{58.6 \text{ A}}}$$